

ENSAE-Sénégal – ISE 2e année – Février 2010
Examen d'Optimisation Dynamique
 Durée : 3 heures ; seuls le photocopié et les notes de cours sont autorisés

Exercice 1 (3 points). Considérer la correspondance $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ suivante

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{-1, 1\} & \text{si } x < 0, \\ [-x, x] & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Dire si Γ est hémi-continue supérieurement et/ou est hémi-continue inférieurement.

Exercice 2 (7 points). Considérer le problème de programmation dynamique suivant :

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) : (x_t)_{t=0, \dots, T} \in [0, 1]^{T+1}, x_0 = x, x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \right\},$$

où $V : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $V \geq 0$ et $\Gamma(x) = [0, x]$. Soit $v(t, x)$ la fonction valeur de ce problème.

- (1) Dire si l'on peut s'attendre à ce que $v(0, x)$ satisfasse l'équation de Bellmann $v(0, x) = \sup\{V(x, y) + \beta v(0, y) : y \in \Gamma(x)\}$;
- (2) Démontrer qu'on a $v(0, x) \leq \sup\{V(x, y) + \beta v(0, y) : y \in \Gamma(x)\}$;
- (3) Calculer itérativement la fonction v dans le cas $T = 3$, $\beta = 1$ et V donnée par

$$V(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x-y} - 2(x-y)^2 + 1 & \text{si } x \geq y; \\ 1 & \text{si } x < y. \end{cases}$$

- (4) Calculer la politique optimale dans le même cas.

Exercice 3 (6 points). Considérer les deux problèmes d'optimisation suivants

$$(P1) \quad \inf \left\{ \int_0^1 [t(x'(t))^2 + x(t)^2] dt, x \in A([0, 1]), x(0) = 1 \right\},$$

$$(P2) \quad \inf \left\{ \int_0^1 [(x'(t))^2 + tx(t)^2] dt, x \in A([0, 1]), x(0) = 1 \right\},$$

où la classe $A([0, 1])$ est la classe des fonctions admissibles, c'est-à-dire les fonctions continues sur $[0, 1]$ et C^1 par morceaux.

- (1) En s'inspirant aux exemples de non-unicité vus en cours, démontrer que le problème (P1) n'a pas de solution.
- (2) Écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (P2) sous la forme d'une équation d'Euler-Lagrange complétée avec des conditions au bord.
- (3) Ces conditions sont-elles suffisantes pour l'optimalité ?

Exercice 4 (7 points). Un gestionnaire de portefeuille dispose d'un capital partitionné en deux : des actions à placer en bourse et un placement dans un compte rémunéré. On introduit les notations suivantes :

$r(t)$ le taux de rémunération du compte ;
 $\delta(t)$ le flux de dividende que rapporte une action ;
 $S(t)$, le prix instantané d'une action.

On suppose que les ventes et les achats sont limités à au plus M actions, (M étant un nombre fixé une bonne fois pour toute) et chacune de ces opérations entraînent un coût proportionnel (à ces opérations).

- (1) Modéliser le problème de contrôle pour maximiser les gains à une échéance qu'on note T .
- (2) Par le principe de Pontryagin, étudier le problème ainsi modélisé.
- (3) Pour $r(t) = 4/100$, $\delta(t) = 10/100$, $S(t) = 100$, $T = 6$ mois et $M = 50$, faire une application complète de la deuxième question.