ENSAE-Sénégal – ISE 2e année – Février 2010

Examen d'Optimisation Dynamique

CORRIGÉ

Exercice 1 (3 points)**.** Considérer la corréspondance $\Gamma : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ suivante

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{-1, 1\} & \text{si } x < 0, \\ [-x, x] & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Dire si Γ est hémi-continue supérieurement et/ou est hémi-continue inférieurement.

Solution.

Cette correspondance n'est ni hémi-continue supérieurement et/ou est hémi-continue inférieurement, et dans les deux cas on trouve un problème au point $x = 0$. En effet on a $\Gamma(0) = \{0\}$ et $\Gamma(-\frac{1}{n}) = \{-1, 1\}$. Prenons $y_n \in \Gamma(-\frac{1}{n})$, par exemple $y_n = 1$. De cette manière on a $y_n \to 1$. Comme $-\frac{1}{n} \to 0$, si la correspondance était hémi-continue supérieurement, il faudrait que le point 1, qui est la limite de y_n, appartienne à $\Gamma(0)$, ce qui n'est pas le cas.

En considérant encore la suite $-\frac{1}{n} \to 0$, si la correspondance était hémi-continue inférieurement, il faudrait trouver des points $y_n \in \Gamma(-\frac{1}{n})$ tels que $y_n \to 0$ (car $0 \in \Gamma(0)$). Or, ceci n'est pas possible parce que 0 n peut pas être la limite d'une suite composée par des valeurs 1 et des valeurs -1.

Exercice 2 (7 points)**.** Considérer le problème de programmation dynamique suivant :

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) \ : (x_t)_{t=0,\cdot,T} \in [0,1]^{T+1},\ x_0 = x,\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \right\},$$

où $V : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $V \geq 0$ et $\Gamma(x) = [0, x]$. Soit $v(t, x)$ la fonction valeur de ce problème.

(1) Dire si l'on peut s'attendre à ce que $v(0, x)$ satisfasse l'équation de Bellmann $v(0, x) = \sup\{V(x, y) + \beta v(0, y) \ : \ y \in \Gamma(x)\}$;

(2) Démontrer qu'on a $v(0, x) \leq \sup\{V(x, y) + \beta v(0, y) \ : \ y \in \Gamma(x)\}$;

(3) Calculer itérativement la fonction v dans le cas $T = 3$, $\beta = 1$ et V donnée par

$$V(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x - y} - 2(x - y)^2 + 1 & \text{si } x \geq y; \\ 1 & \text{si } x < y. \end{cases}$$

(4) Calculer la politique optimale dans le même cas.

Solution.

(1) Non, pas du tout ! celle-ci est l'équation satisfaite en horizon infini, cela n'a rien à voir.

(2) Ce qui est sûr est qu'on a $v(0, x) = \sup\{V(x, y) + v(1, y) \ : \ y \in \Gamma(x)\}$; il nous suffit alors de démontrer que $v(1, y) \leq \beta v(0, y)$. On a

$$\begin{aligned} v(1, y) &= \sup \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) \ : (x_t)_{t=1,\cdot,T},\ x_1 = y,\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{t=1}^{T} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) \ : (x_t)_{t=1,\cdot,T+1},\ x_1 = y,\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \right\} \end{aligned}$$

(inégalité obtenue en rajoutant artificiellement en dernier terme pour $t = T$, qui est positif. Dans la dernière expression on peut factoriser un β et obtenir la même formule qui donne $v(0, y)$ (simplement les temps ont été translaté de $0, \ldots, T$ à $1, \ldots, T + 1$).

(3) Pour commencer, on a $v(3,x)=0$. Ensuite, calculons $v(2,x)$:

$$\begin{aligned} v(2,x) &= \sup\{V(x,y)\ :\ y\in[0,x]\} = \sup\{\sqrt{x-y}-2(x-y)^2+1\ :\ y\in[0,x]\} \\ &= \sup\{\sqrt{t}-2t^2+1\ :\ t\in[0,x]\}. \end{aligned}$$

La fonction $U(t)=\sqrt{t}-2t^2+1$ est concave (strictement) et atteint son maximum en $t=\frac{1}{4}$ (faire la dérivée). Ce maximum vaut $\frac{11}{8}$. Si $x\geq 4$ on a alors $V(2,x)=\frac{11}{8}$. Si $\frac{1}{4}\notin[0,x]$ le maximum est alors atteint en $t=x$ (car la fonction serait croissante sur cet intervalle) et on a donc $v(2,x)=U(x)$. En général on a $v(2,x)=\phi(x)$ avec $\phi=U$ sur $[0,\frac{1}{4}]$ et $\phi=\phi(\frac{1}{4})=\frac{11}{8}$ sur $[\frac{1}{4},1]$. La fonction ϕ est également concave (parce que sa dérivée est décroissante tant qu'lle coïncide avec delle de U et se stabilise à 0 justement après le point où $U'=0$, faire un dessin pour s'en convaincre).

Passons à $v(1,x)$. On a $v(1,x)=\sup\{U(x-y)+\phi(x)\ :\ y\in[0,x]\}$. Si $x\geq\frac{1}{2}$ il est évident qu'on ne peut pas faire mieux que prendre $x-y=\frac{1}{4}$ et $y\geq\frac{1}{4}$, en obtenant la valeur $2U(\frac{1}{4})=2\phi(\frac{1}{4})=2\phi(\frac{x}{2})$. Par contre, pour $x<\frac{1}{2}$ on va faire ce raisonnement : en prenant $y=\frac{x}{2}$ on obtient $U(x-y)+\phi(y)=U(\frac{x}{2})+\phi(\frac{x}{2})=2\phi(\frac{x}{2})$, alors qu'avec $y=0$ on a $U(x-y)+\phi(y)=U(x)\leq\phi(x)$ et avec $y=x$ on a $U(x-y)+\phi(y)=\phi(x)$. Les deux valeurs au bord sont inférieurs à la valeur en $y=\frac{x}{2}$ car, ϕ étant concave sur $[0,x]$ et $\phi(0)=0$, on a $\phi(x)<2\phi(\frac{x}{2})$ (l'inégalité est stricte parce que ϕ n'est pas affine sur $[0,x]$). Donc le maximum n'est pas réalisé au bord, mais à l'intérieur, et il est donc caractérisé par $U'(x-y)=\phi'(y)$. Il n'est pas possible avoir $y\geq\frac{1}{4}$, car sinon on aurait $\phi'(y)=0$ et pour avoir $U'(x-y)=0$ il faudrait $x-y=\frac{1}{4}$, ce qui impliquerait $x\geq\frac{1}{2}$. Le bon y appartient alors à $]0,\frac{1}{4}[$, là où $\phi=U$, ce qui donne que la solution est $y=\frac{x}{2}$. On a donc que le maximum est $2\phi(\frac{x}{2})$, formule qui est vérifiée dans le cas $x<\frac{1}{2}$ aussi bien que dans le cas $x\geq\frac{1}{2}$.

On a trouvé $v(1,x)=2\phi(\frac{x}{2})$ et on cherche alors $v(0,x)=\sup\{U(x-y)+2\phi(\frac{x}{2})\ :\ y\in[0,x]\}$. Des raisonnements du même type qu'avant montrent que l'optimum est réalisé par $y=x-\frac{1}{4}$ si $x\geq\frac{3}{4}$ ou par $y=\frac{2x}{3}$ si $x<\frac{3}{4}$ et que la valeur du maximum est donnée par $3\phi(\frac{x}{3})$. On a donc $v(0,x)=3\phi(\frac{x}{3})$.

(4) Comme conséquence de ce qu'on vient de montrer, la politique optimale est obtenue de la manière suivante. Prenons x_0 : si $x_0\geq\frac{3}{4}$ alors $x_1=x_0-\frac{1}{4}$, $x_2=x_0-\frac{1}{2}$ et $x_3=x_0-\frac{3}{4}$. Sinon $x_1=\frac{2x_0}{3}$, $x_2=\frac{x_0}{3}$, $x_3=x_2=\frac{x_0}{3}$.

Exercice 3 (6 points)**.** Considérer les deux problèmes d'optimisation suivants

$$(P1)\quad \inf\left\{\int_0^1\left[t(x'(t))^2+x(t)^2\right]dt,\ x\in A([0,1]),\ x(0)=1\right\},$$

$$(P2)\quad \inf\left\{\int_0^1\left[(x'(t))^2+tx(t)^2\right]dt,\ x\in A([0,1]),\ x(0)=1\right\},$$

où la classe $A([0,1])$ est la classe des fonctions admissibles, c'est-à-dire les fonctions continues sur $[0,1]$ et C^1 par morceaux.

(1) En s'inspirant aux exemples de non-unicité vus en cours, démontrer que le problème (P1) n'a pas de solution.

(2) Écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (P2) sous la forme d'une équation d'Euler-Lagrange completée avec des conditions au bord.

(3) Ces conditions sont-elles suffisantes pour l'optimalité ?

Solution.

(1) On peut considérer, pour tout $N\geq 1$, la fonction

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0,\frac{1}{N}],\\ -\frac{\ln t}{\ln N} & \text{si } t\in]\frac{1}{N},1].\end{cases}$$

Tous les calculs peuvent être faits explicitement, en obtenant une valeur qui tend vers 0 quand $N \to \infty$ (on a en fait $\int_0^1 t(x'(t))^2 dt = (\ln N)^{-1}$ ainsi que $\int_0^1 (x(t))^2 dt = (2 - 2/N)/(\ln N)^2 + (2 + \ln N)/N \ln N$, en utilisant la primitive de $\ln t^2$ qui est $t(\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t$). En alternative, il est possible de calculer explicitement la partie avec la dérivée (qui est plus simple) et de montrer que l'autre va vers 0 par convergence dominée. De toute manière on déduit que la borne inférieure est nulle (lle n'est pas négative car les fonctions intégrandes sont positives). Elle ne peut pas être atteinte car il faudrait une fonction constante (pour annuler le premier terme), nulle presque partout (pour le deuxième), et égale à 1 en 0 (pour la condtion $x(0) = 1$), ce qui est impossible.

(2) L'équation d'Euler-Lagrange est $x''(t) = tx(t)$. La condition au point 0 est simplement $x(0) = 1$. Au point 1, il y a la condition de transversalité $x'(1) = 0$.

(3) Oui, parce que le problème est convexe (strictement convexe, d'ailleurs).

Exercice 4 (7 points)**.** Un gestionnaire de portefeuille dispose d'un capital partitionné en deux : des actions à placer en bourse et un placement dans un compte rémunéré. On introduit les notations suivantes :
$r(t)$ le taux de rémunération du compte ;
$\delta(t)$ le flux de dividende que rapporte une action ;
$S(t)$, le prix instantané d'une action.
On suppose que les ventes et les achats sont limités à au plus M actions, (M étant un nombre fixé une bonne fois pour toute) et chacune de ces opérations entraînent un coût proportionnel (à ces opérations).

(1) Modéliser le problème de contrôle pour maximiser les gains à une échéance qu' on note T.

(2) Par le principe de Pontryagin, étudier le problème ainsi modélisé.

(3) Pour $r(t) = 4/100$, $\delta(t) = 10/100$, $S(t) = 100$, $T = 6$ mois et $M = 50$, faire une application complète de la deuxième question.