ISSEA
ISE 2e année
10 mars 2008

Examen
Optimisation Dynamique

Durée : 2 heures

Seul le polycopié et les notes de cours sont autorisés

Exercice 1 (5 points)**.** Trouver la ou les solutions du problème de maximisation suivant :

$$\sup\left\{\int_0^1 (\log(x'(t)) + x(t))\, dt\ x \in C^1([0,1]),\ x(0) = x(1) = 0\right\}.$$

Préciser, en résolvant soigneusement l'exercice (tout ce que vous dites doit être démontré), si et pourquoi il s'agit d'une solution unique, et justifier que les conditions qu'elle satisfait sont suffisantes à garantir son optimalité.

Exercice 2 (7 points)**.** Trouver la ou les solutions du problème de minimisation suivant, qui dépende des deux paramètres x (point de départ) et s (instant de départ) :

$$\inf\left\{\int_s^1 \left(\frac{1}{2}(y'(t))^2 + ty'(t) + y(t)\right) dt + y(1)\ x \in C^1([s,1]),\ y(s) = x\right\}.$$

Comme dans l'exercice précédent, préciser, en résolvant soigneusement l'exercice, si et pourquoi il s'agit d'une solution unique, et justifier que les conditions qu'elle satisfait sont suffisantes à garantir son optimalité.

De plus, calculer la valeur $v(s,x)$ du minimum, écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème et vérifier que la fonction valeur la satisfait bien.

Exercice 3 (10 points)**.** Considérer le problème de programmation dynamique suivant :

$$\sup\left\{\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t V(x_t, x_{t+1})\ : (x_t)_{t=0,\cdot,T} \in [0,1]^{T+1},\ x_0 = x,\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\right\},$$

où $V : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $V(x,y) \geq 0$ et $\Gamma(x) = [0,x]$.

Soit $v(t,x)$ la fonction valeur associée au problème.

1. Dire si l'on peut s'attendre à ce que $v(0,x)$ satisfasse l'équation de Bellmann $v(0,x) = \sup\{V(x,y) + \beta v(0,y)\ :\ y \in \Gamma(x)\}$;
2. Démontrer qu'on a $v(0,x) \leq \sup\{V(x,y) + \beta v(0,y)\ :\ y \in \Gamma(x)\}$;
3. Calculer itérativement la fonction v dans le cas $T = 3$, $\beta = 1$ et V donnée par

$$V(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x-y} - 2(x-y)^2 + 1 & \text{si } x \geq y; \\ 1 & \text{si } x < y. \end{cases}$$

4. Calculer la politique optimale dans le même cas ;
5. Avec la même fonction V, donner la politique optimale dans le cas $T = 4$ et $x = 1$ aussi, pour β quelconque.