ENSAE 2011/2012 - 2A SEMESTRE 2

—

EXAMEN SESSION DE RATTRAPAGE

—

Optimisation Dynamique

2h, sans documents, calculatrice non autorisée
Ce sujet se compose d'une seule page

Exercice 1 (6 points)**.** Trouver la solution au problème d'optimisation suivant :

$$\min\left\{a(x_0,y)+b(y,z)+c(z,w)+d(w) \quad : \quad y\geq x_0+\frac{1}{4},\quad z\leq y-\frac{1}{4},\quad w\geq z+\frac{1}{4}\right\},$$

où $x_0\in\mathbb{R}$ est fixé et

$$a(x,y)=\ln(y-x),\quad b(y,z)=-\frac{e}{2}|y-z|^2,\quad c(z,w)=\ln(w-z),\quad d(w)=-ew.$$

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer les correspondances $\Gamma_i:\mathbb{R}\to\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définies par

$$\Gamma_1(x)=[\sin x,1+\sin x],\quad \Gamma_2(x)=[\sin x,1+\sin x]\cup B(x),\quad \Gamma_3(x)=[\sin x,1+\sin x]\setminus B(x),$$

où $B(x)=\{x\}$ si $x\in\mathbb{Z}$ et $B(x)=\emptyset$ si $x\notin\mathbb{Z}$.

Pour chacune de ces correspondances dire en quels points elles sont hémi-continues supérieurement, hémi-continues inférieurement, continues.

Exercice 3 (5 points)**.** Résoudre le problème

$$\min\{J(f):=\int_0^1(1+t)f'(t)^2dt\,;\ f\in\mathcal{A}\},\quad \text{où}\quad \mathcal{A}:=\{f\in C^1([0,1])\ :\ f(0)=1,\ f(1)=2\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien de minimiseurs.

Exercice 4 (8 points)**.** Considérer le problème de contrôle suivant

$$\max\int_t^T\left(x(s)u(s)-\frac{1}{2}u(s)^2\right)dt\quad : \quad x'(s)=x(s)+u(s),\quad u(t)\in\mathbb{R},\quad x(t)=x.$$

a) Ecrire l'Hamiltonien du système et le système Hamiltonien résolu par $(x(s),p(s))$ avec ses conditions aux limites.

b) Trouver la seule solution de ce système pour toute condition initiale $x(t)=x$.

c) Écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème, qui sera satisfaite par la fonction valeur $v(t,x)$, avec sa condition finale $v(T,x)=\dots$.

d) Trouver une solution à cette équation et conclure : justifier que cette solution coïncide avec la fonction valeur et trouver la solution du problème de contrôle intial.