Université de Paris Sud 11
Mathématiques

L2 – Math203
2ème semestre 11/12

Examen du 30 mai 2012

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.

Exercice 1.— Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)dt = 0.$$

Exercice 2.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique égale à $1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, +\pi[$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx$.
3. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
4. Citer avec précision le théorème de Dirichlet.
5. Calculer $f(\pi)$ et $f(0)$. En déduire la valeur des sommes suivantes
$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$
6. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$. En déduire la valeur de $S_3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

1. Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+(x+2\pi n)^2}$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer alors que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$ converge et que sa somme, qu'on notera $\widetilde{f}$, est une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction
$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}dy = \int_{-\infty}^{0} f(y)e^{-ixy}dy + \int_{0}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}dy.$$
est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
4. Donner les coefficients de Fourier exponentiels $c_k(\widetilde{f})$ de $\widetilde{f}$ en fonction de $\widehat{f}$.
5. On suppose que la série de Fourier de $\widetilde{f}$ converge normalement, et on note S sa somme.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(S) = c_k(\widetilde{f})$. Que peut-on en déduire pour S?
   (b) En déduire la formule de Poisson : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.