M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Équations Elliptiques et Calcul des Variations

—

Exercices

Le niveau de difficulté des exercices est variable. Parfois il s'agit d'applications des résultats vus en classe, parfois cela demande de reprendre la preuve et l'adapter. Ces premiers exercices concernent les 4 premiers cours. Il peut toujours y avoir des erreurs (autres que celles corrigées en rouge) dans les énoncés, merci de me les signaler si vous en repérez.

Exercice 1. Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}f(t)^2\right] dt\,;\ f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1])\ :\ f(0) = 0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur.

Exercice 2. Considérer le problème

$$\min\left\{\int_0^1 \Big[|u'(t)|^2 + \arctan(u(t))\Big]\ dt\ :\ u \in C^1([0,1])\right\},$$

et prouver qu'il n'a pas de solutions. Prouver au contraire l'existence d'une solution si on rajoute la condition au bord $u(0) = 0$, écrire la condition d'optimalité satisfaite par les minimiseurs et discuter leur régularité.

Exercice 3. Prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème

$$\min\left\{\int_\Omega \Big(f(x)|u(x)| + |\nabla u(x)|^2\Big)\,dx\,;\ u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega u = 1\right\},$$

lorsque Ω est un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ (le signe de f n'est pas nécessaire pour l'existence). Où est-ce qu'on se sert de la connexité ? Démontrer que si Ω n'est pas connexe (mais a un nombre fini de composantes connexes) on a l'existence mais peut-être pas l'unicité, et que sans la connexité ni la positivité on n'a peut-être même pas l'existence.

Exercice 4. Résoudre complètement

$$\min\left\{\int_Q \Big(|\nabla u(x,y)|^2 + u(x,y)^2\Big)\ dx\,dy\ :\ u \in C^1(Q),\ u = \phi \text{ sur } \partial Q\right\},$$

où $Q = [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $\phi : \partial Q \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1,\ y \in [-1,1] \\ 2(e^y + e^{-y}) & \text{si } x = 1,\ y \in [-1,1] \\ (x+1)(e + e^{-1}) & \text{si } x \in [-1,1],\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Trouver le minimiseur (s'il existe dans la classe des fonctions C^1 jusqu'au bord de Q) et la valeur du minimum, et justifier la minimalité. Écrire et résoudre l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème n'est pas obligatoire mais peut se révéler utile.

Exercice 5. Prouver que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ s.c.i. il existe une suite de fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, chacune $k-$Lipschitzienne, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(f_k(x))_k$ converge croissant vers $f(x)$.

Utiliser cet argument et les théorèmes vu en classe pour prouver la semicontinuité, par rapport à la convergence faible dans $H^1(\Omega)$, de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega f(u(x))|\nabla u(x)|^p\,dx,$$

où $p \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est s.c.i..

Exercice 6. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution distributionnelle dans Ω de $\Delta u = f$ où $f \in H^{-1}(\Omega)$. Prouver $||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||f||_{H^{-1}(\Omega)}$ (on pose $||u||_{H_0^1} := ||\nabla u||_{L^2}$).

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\phi : \partial\Omega$ une fonction Lischitzienne. Démontrer qu'il existe au moins une fonction $\bar{u}$ Lipschitzienne sur $\bar{\mathbb{R}}^n$ et telle que $\bar{u} = \phi$ sur $\partial\Omega$.

Considérer le problème

$$\min \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \varepsilon_0 u^2 \right) \, dx \; : \; u \in H^1(\Omega), \; u - \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

où la condition $u - \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ est une formalisation de $u = \phi$ sur $\partial\Omega$.

Démontrer que, au moins pour $\varepsilon_0 > 0$ petit, le problème admet une solution, et donner un exemple avec ε_0 grand où la solution n'existe pas. Démontrer également que, pour $\varepsilon_0 > 0$ petit, la solution est unique. De quoi va dépendre la petitesse de ε_0 ? Écrire l'équation satisfaite par le minimiseur et démontrer $u \in C^\infty(\Omega)$ (la régularité C^∞ n'étant pas assurée jusqu'au bord).

Exercice 8. Écrire et justifier une inégalité de type Caccioppoli entre la norme $L^p(B_r)$ de ∇u et la norme $L^p(B_R)$ de u pour les solutions du $p-$Laplacien $\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$.

Exercice 9. On a prouvé que pour toute $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ il y a une solution $u = \Gamma * f$ de $\Delta u = f$, qui satisfait $||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Ceci n'implique pas $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ mais surement $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Montrer que
- pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ il y a une solution de $\Delta u = f$ avec $||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$;
- pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et toute solution de $\Delta u = f$ on a $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
- pour tout $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et toute solution de $\Delta u = f$ on a $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
- pour tout $f \in H^k_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et toute solution de $\Delta u = f$ on a $u \in H^{k+2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une solution distributionnelle de $\Delta u = b(x) \cdot \nabla u + f(x) u$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^∞ données. Prouver que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, Ω un domaine sympa dans $\mathbb{R}^n$ et $A(x)$ une matrice $n \times n$ symétrique satisfaisant $\lambda I \leq A(x) \leq \Lambda I$ pour tout $x \in \Omega$. Considérer les équations

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} -\nabla \cdot (A(x) \nabla u) + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} -\text{Trace}(A(x) D^2 u) + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}.$$

Pour chacune discuter l'existence et l'unicité de la solution. En particulier,
- pour les équations I et II, démontrer existence et unicité de la solution faible,
- pour l'équation III, démontrer l'unicité de la solution classique (supposer si besoin $A \in C^0$) si f est strictement croissante ;
- faire également le cas plus difficile où f est juste supposée croissante.

Exercice 12. Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; r < |x| < R\}$ une couronne dans $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $0 < f(x) < 1$ dans Ω et u une solution C^2 de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prouver que la dérivée normale rentrante $\frac{\partial u}{\partial n}$ de la solution satisfait

$$0 < \frac{\partial u}{\partial n} < c(r, R, n) \text{ sur } \partial B(0, r) \text{ ainsi que } 0 < \frac{\partial u}{\partial n} < C(r, R, n) \text{ sur } \partial B(0, R),$$

où

$$c(r, R, n) = \frac{A(r, R, n)}{r^{n-1}} - \frac{r}{n}, \quad C(r, R, n) = -\frac{A(r, R, n)}{R^{n-1}} + \frac{R}{n}, \quad \text{avec } A(r, R, n) = \begin{cases} \frac{R^2 - r^2}{2n \ln(R/r)} & \text{si } n = 2 \\ \frac{(n-2)(R^2 - r^2)}{2n(R^{2-n} - r^{2-n})} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Équations Elliptiques et Calcul des Variations

—

Exercices

Cette deuxième série d'exercices porte surtout sur les cours 5 à 9, bien que les notions précédentes apparaissent toujours.

Exercice 13. Supposons que $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ représente une membrane circuler, accrochée sur son bord et contrainte à suivre un profil ϕ sur $\partial\Omega$, en se déformant à l'intérieur. La forme prise par la membrane à l'intérieur est le profil d'une fonction harmonique. Un profil initiale ϕ_0 sur le bord est donné, mais nous pouvons agir sur ce profil pour changer la forme de la membrane. Le but est qu'elle soit la plus plate possible, au sens de la minimisation de la norme de la Hessienne, sur une sous-region donnée $A = B(0,R) \subset \Omega$, mais pour faire cela on paie pour les déformations qu'on impose sur le bord.

Mathématiquement, on considère ce problème : pour tout $\phi \in H^1(\partial\Omega)$ (attention : $\partial\Omega$ est un cercle, donc la signification de l'espace H^1 est claire, ne s'agissant que d'un espace de Sobolev en dimension 1) on définit u_ϕ comme la solution de $\Delta u = 0$ dans Ω avec $u = \phi$ sur $\partial\Omega$ (au sens $u - \phi \in H_0^1(\Omega)$ (vous pourriez vouloir prouver qu'une telle extension harmonique existe...) ; ensuite on veut résoudre

$$\min \quad ||\phi - \phi_0||^2_{H^1(\partial\Omega)} + \int_A |D^2 u_\phi|^2 dx.$$

Prouver l'existence d'un tel minimum, tant dans le cas $A = B(0,R)$ avec $R < 1$ que dans le cas $A = \Omega = B(0,1)$.

Montrer également l'existence d'une solution au problème

$$\min \quad ||\phi - \phi_0||^2_{H^1(\partial\Omega)} + |\nabla u_\phi(0)|,$$

où l'on veut que la membrane soit le plus horizontal possible au point central.

Exercice 14. Soit $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ un rectangle et $f \in C_c^\infty(Q)$. Soit $u \in H_0^1(Q)$ la solution de $\Delta u = f$ avec $u = 0$ sur ∂Q. Prouver que $u \in C^\infty(\overline{Q})$. Peut-on dire $u \in C_c^\infty(Q)$? existe-il des fonctions f telles que $u \in C_c^\infty(Q)$?

Exercice 15. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangle équilatéral et $f \in L^p(T)$. Soit $u \in H_0^1(T)$ la solution de $\Delta u = f$ avec $u = 0$ sur ∂T. Prouver $u \in W^{2,p}(T)$.

Aussi, supposons $\int_T f = 0$ (pourquoi ?) et soit v la solution du problème de Neumann $\Delta v = f$ avec $\partial v / \partial n = 0$ sur ∂T (au sens faible : $\int_T \nabla v \cdot \nabla \phi = -\int_T f\phi$ pour tout $\phi \in H^1(T)$). Prouver $v \in W^{2,p}(T)$ et $v \in W^{3,p}(T)$ si $f \in W^{1,p}(T)$.

Exercice 16. Démontrer que les espaces de Campanato pourraient être définis avec les médianes au lieu de la moyenne et que la même correspondance entre fonctions $\mathcal{L}^{1,\lambda}$ et $C^{0,\alpha}$ subsiste, lorsque $\lambda = N + \alpha$, Ω est tel que $|\Omega \cap B(x_0, r)| \geq cr^N$ pour tout $x_0 \in \Omega$ et $r \leq \mathrm{diam}(\Omega)$ et $\mathcal{L}^{1,\lambda}(\Omega)$ est défini par

$$\mathcal{L}^{1,\lambda}(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) \,:\, \exists C \,:\, \int_{\Omega \cap B(x_0,r)} |u - m_{x_0,r}| \leq Cr^\lambda\},$$

où $m_{x_0,r}$ est la médiane de u sur $\Omega \cap B(x_0, r)$ (la médiane de u sur un ensemble A est une valeur m telle que $|\{x \in A \,:\, u(x) \geq m\}| \geq \frac{1}{2}|A|$ et $|\{x \in A \,:\, u(x) \leq m\}| \geq \frac{1}{2}|A|$; s'il y en a plusieurs ils forment un intervalle et on décide de définir $m_{x_0,r}$ comme le milieu de cet intervalle).

Exercice 17. Trouver la constante de Poincaré de l'intervalle $(-A, A)$, c-à-d la plus petite constante C telle que

$$\int_{-A}^{A} u^2(x)dx \leq C \int_{-A}^{A} (u')^2(x)dx$$

pour toute fonction $H_0^1((-A, A))$.

Quelle est la plus grande valeur de A telle que $H_0^1((-A,A)) \ni u \mapsto \int_{-A}^{A}[(u')^2(x) - u^2(x)]dx$ est une fonctionnelle convexe ?

Exercice 18. Soit u une solution suffisamment régulière de l'équation de Monge-Ampère $\det(D^2u) = f$ et u' sa dérivée dans une direction fixée. Trouver une équation elliptique de la forme $a_{ij}u'_{ij} = g$ satisfaite par u', où la matrice A de coefficients a_{ij} peut faire apparaître la solution u et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Prouver également que la même équation peut également s'écrire $\nabla \cdot (A\nabla u') = g$.

Exercice 19. Lesquelles parmi les fonctions qui s'écrivent en cordonnées polaires comme $u(\rho,\theta) = \rho^\alpha \sin(k\theta)$ sont-elles harmoniques sur la boule unité ? (c.-à-d. pour quelles valeurs de $\alpha, k \in \mathbb{R}$).

Exercice 20. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne. Pour $p > 2$ considérer le problème variationnel

$$\min \left\{ \int_\Omega [|\nabla u(x)|^p + f(x)u(x)]\, dx \ : \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Démontrer qu'il existe unique une solution u à ce problème de minimisation et prouver que l'on a $F \in H^1_{loc}(\Omega)$, où $F(x) = |\nabla u(x)|^{p/2-1}\nabla u(x)$.

Exercice 21. Soit $u \in H^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$ une fonction telle que

$$\nabla \cdot ((1+u^2)\nabla(\Delta u)) = f,$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Prouver $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si f est juste $C^{k,\alpha}$ que peut-on dire de la régularité de u ? Où est-ce que la dimension intervient ?

Exercice 22. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ (qu'on pourra supposer connexe) et $p \in]1,\infty[$. Prouver que le problème de minimisation suivant a une solution

$$\min \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{2/p}} \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$$

et en étudier la régularité à l'intérieur de Ω.

Exercice 23. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et mesurable. Soit $\pi(A) \subset \mathbb{R}$ défini par $\pi(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R} \ : \ (x,y) \in A\} > 0\}$. Prouver que l'on a $Per(A) \geq 2\mathcal{L}^1(\pi(A))$. Appliquer ce résultat au problème isopérimétrique en $\mathbb{R}^2$, en prouvant l'existence d'une solution au problème

$$\min \left\{ Per(A) \ : \ A \subset \mathbb{R}^2,\ A \text{ borné},\ \mathcal{L}^2(A) = 1 \right\}.$$

Exercice 24. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert régulier et $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que le problème suivant admet une solution

$$\min \left\{ \int_\Omega G(x, u(x), \nabla u(x))dx \ : \ u \text{ est une fonction } 1\text{−Lipschitizienne et convexe avec } \int_\Omega u(x)dx = 0 \right\}.$$

Exercice 25. Dans le disque $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ il faut placer un disque $B(x_0,r)$ de centre $x_0 \in B(0,1)$ et rayon $r \leq 1 - |x_0|$ de manière à minimiser

$$J(x_0,r) := \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{1-|x_0|^2}} + \int_{B(0,1)} g(x, u_{x_0,r}(x))dx,$$

où $g : B(0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée donnée et $u_{x_0,r}$ désigne la solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{dans } B(0,1) \setminus \overline{B(x_0,r)}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0,1) \cup \partial B(x_0,r), \end{cases}$$

qu'on prolonge à 0 sur $B(x_0,r)$. Prouver qu'il existe une solution.

Exercice 26 (5 points)**.** Considérer, pour $i = 0, 1$, le problème de minimisation

$$(P_i) \quad \min \left\{ \int_0^1 W_i(u'(t))\, dt \ : \ u \in H^1([0,1]),\, u(0) = 0,\, u(1) = A \right\},$$

où $W_0(y) = (|y| - 1)_+^2$ (c-à-d, le carré de la partie positive de $|y| - 1$) et $W_0(y) = (|y| - 1)^2$. Prouver que (P_0) admet au moins une solution quelle que soit la valeur de A. Déterminer les valeurs de A pour lesquelles il y a unicité de la solution et les trouver toutes. Prouver que (P_1) admet une solution (et la trouver) si et seulement si $|A| \geq 1$.

Exercice 27 (5 points)**.** Dire si la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega e^{u(x)+|\nabla u(x)|}\, dx,$$

est bien définie sur $H^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, continue et/ou semi-continue fortement et/ou faiblement dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 28 (5 points)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ avec $N > 1$. Considérons le problème de minimisation

$$\inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 + u \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \ , \ u(0) = 0 \right\}.$$

Prouver que cette borne inférieure est un nombre réel négatif mais qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 29 (6 points)**.** Soit $f \in L^2([0,1])$ donnée. Considérer fonctionnelle $J : L^2([0,1]) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$J(u) := \int_0^1 \left[t(u'(t))^2 + \frac{(u(t)-1)^2}{t} + f(t)u(t) \right] dt$$

(avec $J(u) = +\infty$ si $u \notin H^1_{loc}(]0,1[)$ ou si $u \in H^1_{loc}(]0,1[)$ mais que $t(u'(t))^2$ ou $(u(t)-1)^2/t$ ne sont pas intégrables sur $[0,1]$).

a) Prouver que J est semi-continue inférieurement par rapport à la convergence faible L^2.

b) Prouver qu'il existe une solution au problème $\min\{J(u) \ : \ u \in L^2([0,1])\}$.

c) Soit $g(x) = (x-1)^2$; prouver que pour toute suite $(u_n)_n$ avec $J(u_n) \leq C$ la suite $(g \circ u_n)_n$ est bornée dans $BV([0,1])$.

d) Prouver que toute fonction u telle que $J(u) < +\infty$ est une fonction continue sur $[0,1]$ et satisfait $u(0) = 1$.

Exercice 30 (6 points)**.** Soit $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une solution faible de $\Delta u = |\nabla u| + f(x)u$ où f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

a) Prouver $u \in H^3_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

b) Prouver $u \in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p < +\infty$.

c) En dimension $n = 2$, prouver $u \in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ si l'hypothèse $f \in C^1$ est remplacée par $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour un certain $p > 1$.

Exercice 31 (5 points)**.** Soit $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ donnée par $\rho(x) := \frac{1}{1+|x|}$. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ une fonction non-négative. On prolonge u par 0 en dehors de Ω ; on peut donc définir $\rho * u$ par convolution sur tout $\mathbb{R}^N$. Supposons que

$$\nabla \cdot ((\rho * u)\nabla u) = f,$$

où $f \in C^\infty(\Omega)$. Prouver $u \in C^\infty(\Omega)$ (régularité à l'intérieur seulement).

Exercice 32 (7 points)**.** Étant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un carré ouvert et $f \in L^2(\Omega)$. Considérons le problème

$$\min \{ \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2} + f \ln(u) \ : \ u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega),\ u > 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 1 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Prouver que ce problème admet une solution $u \in H^2(\Omega)$.

Exercice 33 (7 points)**.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $h(t) = \frac{t^2}{2} + t \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ et $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ donnée par $H(z) = h(|z|)$.

Écrire la matrice Hessienne $D^2H(z)$ de H e tout point $z \in \mathbb{R}^N$, prouver que H est convexe et trouver (ou prouver qu'elles existent) des constantes positives λ et Λ telles que $\lambda I \le D^2H(z) \le \Lambda I$ pour tout $z \in \mathbb{R}^N$.

Étant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné et $\phi \in H^1(\Omega)$, considérer le problème variationnel

$$\min \left\{ \int_\Omega H(\nabla u(x))dx \ : \ u - \phi \in H^1_0(\Omega) \right\}.$$

Démontrer qu'il existe unique une solution u à ce problème de minimisation et que l'on a $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Exercice 34 (7 points)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ et $p \in]1, \infty[$. Considérer le problème de minimisation suivant

$$\inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{2/p}} \ : \ u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

a) Prouver que pour $p < 6$ la borne inférieure est en fait un minimum.
b) Dire si le minimiseur est unique et prouver qu'il est C^∞ à l'intérieur du domaine Ω.
c) Prouver que la borne inférieure vaut 0 si $p > 6$.
d) Prouver que, pour $p = 6$, la borne inférieure est strictement positive mais elle n'est pas atteinte.
e) Prouver que, pour $p = 6$, la borne inférieure est la même qu'on aurait en remplaçant Ω par tout autre ouvert borné $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 35 (8 points)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ la boule en dimension N. Considérer le problème variationnel suivant :

$$\min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega (u-1)^2 + Per(A) \ : \ u \in H^1_0(\Omega), A \subset \Omega \text{ de périmètre fini, avec } u = 0 \text{ p.p. sur } A^c \right\}.$$

où $Per(A)$ représente le périmètre de A au sens de l'espace BV.

a) Prouver que le problème admet une solution (u, A).
b) Prouver que pour toute solution (u, A) on a $0 \le u \le 1$.
c) Prouver que le problème admet au moins une solution radiale (c'est-à-dire $A = B(0,r)$ et u radiale décroissante).
d) Prouver que cette solution radiale est $C^\infty(\mathring{A})$ et satisfait $u < 1$ dans $\mathring{A}$.
e) Trouver ou caractériser la solution radiale.

Exercice 36 (3 points)**.** Soit $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus B(0,1)$ et $u \in L^1(\Omega)$ une fonction harmonique sur Ω au sens des distributions. Prouver que l'on a $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$

Exercice 37 (3 points)**.** Soit A une matrice symétrique définie positive $n \times n$ fixée et, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, définissons l'ellipse

$$E(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A(x - x_0) \cdot (x - x_0) \le r\}.$$

Supposons qu'une fonction continue $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la propriété suivante : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ on a

$$u(x_0) = \frac{1}{|E(x_0, r)|} \int_{E(x_0,r)} u(x)dx,$$

où $|E(x_0, r)|$ est la mesure de Lebesgue de $E(x_0, r)$ (et à droite on a donc la moyenne sur cet ellipse). Trouver une équation elliptique à coefficients constants $\nabla \cdot (B\nabla u) = 0$ satisfaite par u, en reliant la matrice B à la matrice A.

Exercice 38 (3 points)**.** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \ge 2$ et $x_0 \in \Omega$. Soit $\Omega' = \Omega \setminus \{x_0\}$ et $u \in H^1(\Omega)$ une fonction qui est harmonique dans Ω'. Prouver alors qu'elle est aussi harmonique dans Ω. Avait-on besoin de $u \in H^1(\Omega)$, ou $u \in H^1(\Omega')$ aurait suffit ?