M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Équations Elliptiques et Calcul des Variations

—

Exercices – Feuille 1, octobre 2014

Le niveau de difficulté des exercices est variable. Parfois il s'agit d'applications des résultats vus en classe, parfois cela demande de reprendre la preuve et l'adapter. Ces premiers exercices devraient pouvoir se faire avec les outils des 3 premiers cours. Il peut toujours y avoir des erreurs dans les énoncés, merci de me les signaler si vous en repérez.

Exercice 1. Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}f(t)^2\right] dt\,;\; f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \;:\; f(0) = 0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur.

Exercice 2. Considérer le problème

$$\min\left\{\int_0^1 \left[|u'(t)|^2 + \arctan(u(t))\right]\, dt \;:\; u \in C^1([0,1])\right\},$$

et prouver qu'il n'a pas de solutions. Prouver au contraire l'existence d'une solution si on rajoute la condition au bord $u(0) = 0$, écrire la condition d'optimalité satisfaite par les minimiseurs et discuter leur régularité.

Exercice 3. Prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème

$$\min\left\{\int_\Omega \left(f(x)|u(x)| + |\nabla u(x)|^2\right) dx\,;\; u \in H^1(\Omega),\; \int_\Omega u = 1\right\},$$

lorsque Ω est un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ (le signe de f n'est pas nécessaire pour l'existence). Où est-ce qu'on se sert de la connexité ? Démontrer que si Ω n'est pas connexe (mais a un nombre fini de composantes connexes et on garde $f \geq 0$) on a l'existence mais peut-être pas l'unicité, et que sans la connexité ni la positivité on n'a peut-être même pas l'existence.

Exercice 4. Résoudre complètement

$$\min\left\{\int_Q \left(|\nabla u(x,y)|^2 + u(x,y)^2\right)\, dx\, dy \;:\; u \in C^1(Q),\; u = \phi \text{ sur } \partial Q\right\},$$

où $Q = [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $\phi : \partial Q \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1,\, y \in [-1,1] \\ 2(e^y + e^{-y}) & \text{si } x = 1,\, y \in [-1,1] \\ (x+1)(e + e^{-1}) & \text{si } x \in [-1,1],\, y = \pm 1. \end{cases}$$

Trouver le minimiseur (s'il existe dans la classe des fonctions C^1 jusqu'au bord de Q) et la valeur du minimum, et justifier la minimalité. Écrire et résoudre l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème n'est pas obligatoire mais peut se révéler utile.

Exercice 5. Prouver que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ s.c.i. il existe une suite de fonctions $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, chacune $k-$Lipschitzienne, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(f_k(x))_k$ converge croissant vers $f(x)$.

Utiliser cet argument et les théorèmes vu en classe pour prouver la semicontinuité, par rapport à la convergence faible dans $H^1(\Omega)$, de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega f(u(x))|\nabla u(x)|^p\, dx,$$

où $p \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est s.c.i..

Exercice 6. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution distributionnelle dans Ω de $\Delta u = f$ où $f \in H^{-1}(\Omega)$. Prouver $||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||f||_{H^{-1}(\Omega)}$ (on pose $||u||_{H_0^1} := ||\nabla u||_{L^2}$).

Exercice 7. Écrire et justifier une inégalité de type Caccioppoli entre la norme $L^p(B_r)$ de ∇u et la norme $L^p(B_R)$ de u pour les solutions du $p-$Laplacien $\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$.

M2 MFA - EDPCS & AAG

–

Équations Elliptiques et Calcul des Variations

–

Exercices – Feuille 2, novembre 2014

Ces exercices devraient pouvoir se faire avec les outils des 5 premiers cours. Il peut toujours y avoir des erreurs dans les énoncés, merci de me les signaler si vous en repérez.

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\phi : \partial\Omega$ une fonction Lischitzienne. Démontrer qu'il existe au moins une fonction $\bar{u}$ Lipschitzienne sur $\bar{\mathbb{R}}^n$ et telle que $\bar{u} = \phi$ sur $\partial\Omega$.

Considérer le problème

$$\min \left\{ \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \varepsilon_0 u^2 \right) \, dx \; : \; u \in H^1(\Omega), \; u - \bar{u} \in H^1_0(\Omega) \right\},$$

où la condition $u - \bar{u} \in H^1_0(\Omega)$ est une formalisation de $u = \phi$ sur $\partial\Omega$.

Démontrer que, au moins pour $\varepsilon_0 > 0$ petit, le problème admet une solution, et donner un exemple avec ε_0 grand où la solution n'existe pas. Démontrer également que, pour $\varepsilon_0 > 0$ petit, la solution est unique. De quoi va dépendre la petitesse de ε_0 ? Écrire l'équation satisfaite par le minimiseur et démontrer $u \in C^\infty(\Omega)$ (la régularité C^∞ n'étant pas assurée jusqu'au bord).

Exercice 9. On a prouvé que pour toute $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ il y a une solution $u = \Gamma * f$ de $\Delta u = f$, qui satisfait $||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Ceci n'implique pas $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ mais surement $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Montrer que
- pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ il y a une solution de $\Delta u = f$ avec $||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$;
- pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et toute solution de $\Delta u = f$ on a $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
- pour tout $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et toute solution de $\Delta u = f$ on a $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
- pour tout $f \in H^k_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et toute solution de $\Delta u = f$ on a $u \in H^{k+2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une solution distributionnelle de $\Delta u = b(x) \cdot \nabla u + f(x) u$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^∞ données. Prouver que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, Ω un domaine sympa dans $\mathbb{R}^n$ et $A(x)$ une matrice symétrique $n \times n$ satisfaisant $\lambda I \leq A(x) \leq \Lambda I$ pour tout $x \in \Omega$. Considérer les équations

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} -\mathrm{Trace}(A(x) D^2 u) + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}.$$

Pour chacune discuter l'existence et l'unicité de la solution. En particulier,
- pour les équations I et II, démontrer existence et unicité de la solution faible,
- pour l'équation III, démontrer l'unicité de la solution classique (supposer si besoin $A \in C^0$) si f est strictement croissante ;
- faire également le cas plus difficile où f est juste supposée croissante.

Exercice 12. Lesquelles parmi les fonctions qui s'écrivent en cordonnées polaires comme $u(\rho, \theta) = \rho^\alpha \sin(k\theta)$ sont-elles harmoniques sur la boule unité ? (c.-à-d. pour quelles valeurs de $\alpha, k \in \mathbb{R}$).

Exercice 13. Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, r < |x| < R\}$ une couronne dans $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $0 < f(x) < 1$ dans Ω et u une solution C^2 de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prouver que la dérivée normale rentrante $\frac{\partial u}{\partial n}$ de la solution satisfait

$$0 < \frac{\partial u}{\partial n} < c(r, R, n) \text{ sur } \partial B(0, r) \text{ ainsi que } 0 < \frac{\partial u}{\partial n} < C(r, R, n) \text{ sur } \partial B(0, R),$$

où

$$c(r, R, n) = \frac{A(r, R, n)}{r^{n-1}} - \frac{r}{n}, \quad C(r, R, n) = -\frac{A(r, R, n)}{R^{n-1}} + \frac{R}{n}, \quad \text{avec } A(r, R, n) = \begin{cases} \frac{R^2 - r^2}{2n \ln(R/r)} & \text{si } n = 2 \\ \frac{(n-2)(R^2 - r^2)}{2n(R^{2-n} - r^{2-n})} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Exercice 14. Supposons que $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ représente une membrane circuler, accrochée sur son bord et contrainte à suivre un profil ϕ sur $\partial\Omega$, en se déformant à l'intérieur. La forme prise par la membrane à l'intérieur est le profil d'une fonction harmonique. Un profil initiale ϕ_0 sur le bord est donné, mais nous pouvons agir sur ce profil pour changer la forme de la membrane. Le but est qu'elle soit la plus plate possible, au sens de la minimisation de la norme de la Hessienne, sur une sous-region donnée $A = B(0, R) \subset \Omega$, mais pour faire cela on paie pour les déformations qu'on impose sur le bord.

Mathématiquement, on considère ce problème : pour tout $\phi \in H^1(\partial\Omega)$ (attention : $\partial\Omega$ est un cercle, donc la signification de l'espace H^1 est claire, ne s'agissant que d'un espace de Sobolev en dimension 1) on définit u_ϕ comme la solution de $\Delta u = 0$ dans Ω avec $u = \phi$ sur $\partial\Omega$ (au sens $u - \phi \in H^1_0(\Omega)$ (vous pourriez vouloir prouver qu'une telle extension harmonique existe...) ; ensuite on veut résoudre

$$\min \quad ||\phi - \phi_0||^2_{H^1(\partial\Omega)} + \int_A |D^2 u_\phi|^2 dx.$$

Prouver l'existence d'un tel minimum, tant dans le cas $A = B(0, R)$ avec $R < 1$ que dans le cas $A = \Omega = B(0, 1)$.

Montrer également l'existence d'une solution au problème

$$\min \quad ||\phi - \phi_0||^2_{H^1(\partial\Omega)} + |\nabla u_\phi(0)|,$$

où l'on veut que la membrane soit le plus horizontal possible au point central.

Exercice 15. Considérez l'équation $\Delta u = f(|\nabla u|^2)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞, donnée. Prouver que, si $u \in C^1(\bar{\Omega})$ est une solution faible de cette équation, alors elle est $H^3_{loc}(\Omega)$. En dimension $d = 2$, prouver qu'on peut arriver à C^∞.

Écrire l'équation satisfaite par $v = |\nabla u|^2$, dans le cas où $u \in C^3(\Omega)$. Prouver que le maximum de $|\nabla u|$ est atteint sur le bord.

Exercice 16. Dans la même équation $\Delta u = f(|\nabla u|^2)$, prouver que $u \in C^1(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty$ même en dimension $d = 3$.

Et même en dimension $d = 4$.

M2 MFA - EDPCS & AAG
–
Équations Elliptiques et Calcul des Variations
–
Exercices – Feuille 3, décembre 2014

Ces exercices devraient pouvoir se faire avec les outils des 9 premiers cours. Il peut toujours y avoir des erreurs dans les énoncés, merci de me les signaler si vous en repérez.

Exercice 17. Soit $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ un rectangle et $f \in C_c^\infty(Q)$. Soit $u \in H_0^1(Q)$ la solution de $\Delta u = f$ avec $u = 0$ sur ∂Q. Prouver que $u \in C^\infty(\overline{Q})$. Peut-on dire $u \in C_c^\infty(Q)$? existe-il des fonctions f telles que $u \in C_c^\infty(Q)$?

Exercice 18. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangle équilatéral et $f \in L^p(T)$. Soit $u \in H_0^1(T)$ la solution de $\Delta u = f$ avec $u = 0$ sur ∂T. Prouver $u \in W^{2,p}(T)$.

Aussi, supposons $\int_T f = 0$ (pourquoi ?) et soit v la solution du problème de Neumann $\Delta v = f$ avec $\partial v / \partial n = 0$ sur ∂T (au sens faible : $\int_T \nabla v \cdot \nabla \phi = -\int_T f \phi$ pour tout $\phi \in H^1(T)$). Prouver $v \in W^{2,p}(T)$ et $v \in W^{3,p}(T)$ si $f \in W^{1,p}(T)$.

Exercice 19. Démontrer l'injection $W^{1,p} \subset \mathcal{L}^{1,\lambda}$ pour un λ opportun, et retrouver l'injection$W^{1,p} \subset C^{0,\alpha}$ avec $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ (d étant la dimension) sous les hypothèses opportunes.

Exercice 20. Démontrer que les espaces de Campanato pourraient être définis avec les médianes au lieu de la moyenne et que la même correspondance entre fonctions $\mathcal{L}^{1,\lambda}$ et $C^{0,\alpha}$ subsiste, lorsque $\lambda = d + \alpha$, Ω est tel que $|\Omega \cap B(x_0, r)| \geq cr^d$ pour tout $x_0 \in \Omega$ et $r \leq \mathrm{diam}(\Omega)$ et $\mathcal{L}^{1,\lambda}(\Omega)$ est défini par

$$\mathcal{L}^{1,\lambda}(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) \, : \, \exists C \, : \, \int_{\Omega \cap B(x_0,r)} |u - m_{x_0,r}| \leq Cr^\lambda\},$$

où $m_{x_0,r}$ est la médiane de u sur $\Omega \cap B(x_0, r)$ (la médiane de u sur un ensemble A est une valeur m telle que $|\{x \in A \, : \, u(x) \geq m\}| \geq \frac{1}{2}|A|$ et $|\{x \in A \, : \, u(x) \leq m\}| \geq \frac{1}{2}|A|$; s'il y en a plusieurs ils forment un intervalle et on décide de définir $m_{x_0,r}$ comme le milieu de cet intervalle).

Exercice 21. Refaire l'exercice 16 en dimension quelconque.

Exercice 22. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne. Pour $p > 2$ considérer le problème variationnel

$$\min \left\{ \int_\Omega [|\nabla u(x)|^p + f(x)u(x)] \, dx \; : \; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Démontrer qu'il existe unique une solution u à ce problème de minimisation et prouver que l'on a $F \in H^1_{loc}(\Omega)$, où $F(x) = |\nabla u(x)|^{p/2-1} \nabla u(x)$.

Exercice 23. Soit $u \in H^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$ une fonction telle que

$$\nabla \cdot ((1 + u^2) \nabla(\Delta u)) = f,$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Prouver $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si f est juste $C^{k,\alpha}$ que peut-on dire de la régularité de u ? Où est-ce que la dimension intervient ?

Exercice 24. Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ et $p \in]1, \infty[$. Prouver que le problème de minimisation suivant a une solution

$$\min \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^p\right)^{2/p}} \; : \; u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$$

et en étudier la régularité à l'intérieur de Ω.

M2 MFA - EDPCS & AAG

–

Équations Elliptiques et Calcul des Variations

–

Exercices – Feuille 4, Vacances de Noël

Ces exercices concernent surtout les derniers cours. Il peut toujours y avoir des erreurs dans les énoncés, merci de me les signaler si vous en repérez.

Exercice 25. Trouver la constante de Poincaré de l'intervalle $(-A, A)$, c-à-d la plus petite constante C telle que

$$\int_{-A}^{A} u^2(x)dx \leq C \int_{-A}^{A} (u')^2(x)dx$$

pour toute fonction $H_0^1((-A, A))$.

Quelle est la plus grande valeur de A telle que $H_0^1((-A, A)) \ni u \mapsto \int_{-A}^{A}[(u')^2(x) - u^2(x)]dx$ est une fonctionnelle convexe ?

Exercice 26. Soit u une solution suffisamment régulière de l'équation de Monge-Ampère $\det(D^2u) = f$ et u' sa dérivée dans une direction fixée. Trouver une équation elliptique de la forme $a_{ij}u'_{ij} = g$ satisfaite par u', où la matrice A de coefficients a_{ij} peut faire apparaître la solution u et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Prouver également que la même équation peut également s'écrire $\nabla \cdot (A\nabla u') = g$.

Exercice 27. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et mesurable. Soit $\pi(A) \subset \mathbb{R}$ défini par $\pi(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} > 0\}$. Prouver que l'on a $Per(A) \geq 2\mathcal{L}^1(\pi(A))$. Appliquer ce résultat au problème isopérimétrique en $\mathbb{R}^2$, en prouvant l'existence d'une solution au problème

$$\min \left\{ Per(A) \ : \ A \subset \mathbb{R}^2,\, A \text{ borné},\, \mathcal{L}^2(A) = 1 \right\}.$$

Exercice 28. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert régulier et $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que le problème suivant admet une solution

$$\min \left\{ \int_\Omega G(x, u(x), \nabla u(x))dx \ : \ u \text{ est une fonction } 1\text{−Lipschitizienne et convexe avec } \int_\Omega u(x)dx = 0 \right\}.$$

Exercice 29. Dans le disque $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ il faut placer un disque $B(x_0, r)$ de centre $x_0 \in B(0, 1)$ et rayon $r \leq 1 - |x_0|$ de manière à minimiser

$$J(x_0, r) := \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{1 - |x_0|^2}} + \int_{B(0,1)} g(x, u_{x_0,r}(x))dx,$$

où $g : B(0, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée donnée et $u_{x_0,r}$ désigne la solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{dans } B(0, 1) \setminus \overline{B(x_0, r)}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0, 1) \cup \partial B(x_0, r), \end{cases}$$

qu'on prolonge à 0 sur $B(x_0, r)$. Prouver qu'il existe une solution.

Exercice 30. Soit $u \geq 0$ une fonction Lipschitz à support compact dans $\mathbb{R}^d$, et u^* sa symétrisée. Prouver que u^* est Lipschitz aussi, et $\mathrm{Lip}(u^*) \leq \mathrm{Lip}(u)$.

Exercice 31. On a vu que l'on a $||\nabla u^*||_{L^p} \leq ||\nabla u||_{L^p}$, et on a évidemment égalité si u est radiale. S'agit-il du seul cas d'égalité ?

Exercice 32. Soit $u_n, u \in H_0^1(\Omega)$ des fonctions telles que $\lim_n \int \sqrt{1 + |\nabla u_n|^2} \to \int \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans L^1. Pour quels exposants p peut-on conclure $u_n \to u$ dans L^p ?