Devoir Maison d'Optimisation Numérique

essayez de le faire en deux heures max

Vrai ou faux 1 (4 points)**.** Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Pour chaque réponse, vous pouvez choisir de la justifier (et dans ce cas elle vous rapportera un score compris entre 0 et 1) ou pas (et alors une réponse erronée donnera $-0,5$ points, une réponse correcte $+0,5$). Pour justifier une réponse il faut soit donner un contre-exemple, soit s'appuyer sur des résultats vus en cours.

1. Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement convexe admet un minimum.
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1 qui s'annule en un point $\bar{x}$ et avec dérivée f' strictement positive partout, alors l'algorithme de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ converge vers $\bar{x}$ quelle que soit son initialisation.
3. Le sous-différentiel $\partial f(x)$ d'une fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point x n'est jamais vide.
4. Le sous-différentiel $\partial f(x)$ d'une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ en un point x n'est jamais vide.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la fonctionnelle

$$J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2} f'(t)^2 + \frac{1}{2} f(t)^2 + t f(t)\right] dt.$$

Écrire l'équation d'Euler-Lagrange, complétée par ses conditions aux bords, associée à la minimisation de J sur l'ensemble des fonctions régulières s'annulant en $t = 0$.

Trouver la solution de cette équation en la cherchant parmi les fonctions du type $f(t) = Ae^t + Be^{-t} + Ct + D$. Nous allons appeler $\bar{f}$ cette solution.

En calculant $J(\bar{f} + g) - J(\bar{f})$ (en développant les carrés et/ou en intégrant par partie), montrer que $\bar{f}$ minimise J dans l'ensemble

$$\mathcal{A} := \{f \in C^1([0, 1]) \ : \ f(0) = 0\}.$$

Exercice 3 (5 points)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le triangle $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Soit f la fonction donnée par $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

1. f est-elle convexe ? concave ?
2. Démontrer que tout minimum o maximum local de f sur C se trouve sur la frontière de C.
3. Démontrer que f admet bien un minimum et un maximum sur C.
4. Trouver le minimum de f sur C.
5. Trouver le maximum de f sur C.

Exercice 4 (4 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x| + x^2$. Dire si f est convexe et calculer f^* et f^{**}.

Répondre aux mêmes questions concernant la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to$ définie par $\tilde{f}(x) = f(|x|)$ (ici $|x|$ désigne la norme du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$).

Exercice 5 (6 points)**.** Considérons l'ensemble $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3 \leq 1\}$ et $p = (p_1, \ldots, p_n) \notin K$ un point à l'extérieur de K. Décrire de manière détaillée et explicite au moins une méthode numérique pour calculer la projection de p sur K et justifier sa convergence.

Cette projection pourrait se configurer comme un problème d'optimisation d'une fonction convexe (la distance à p, ou le carré de cette distance) sous contrainte convexe (K étant convexe). Pourquoi ne serait-il pas raisonnable *du tout* de considérer un algorithme de gradient projeté pour répondre à la question précédente ?

Université Paris-Sud
Master 1 Ingéniérie mathématique
Optimisation
Examen du 31 mars 2010

March 3, 2011

Durée 2 heures. Les exercices sont indépendants

Exercice 1. On considère le problème

$$\begin{cases} \inf\{J(x), x \in \mathfrak{C}\}, \\ J(x) = 2x_1 - 2x_2 - x_3, \\ \mathfrak{C} = \{x \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1\}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que (1) a une solution.
2. Ecrire les conditions de Lagrange.
3. Déterminer la solution de (1).
4. Que se passe-t-il si on remplace la première contrainte égalité par la contrainte inégalité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$?

Exercice 2. (Calcul de la projection orthogonale sur un sous espace).
Soient $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B}$ une matrice réelle de dimension $(p, n), p < n$, de rang maximal p, $c \in \mathbb{R}^p$, $E = \{x \in V, \quad \mathbf{B}x = c\}$.

Poser le problème de la détermination de la projection du point $x \in V$ sur E comme un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et en déduire une expression de l'opérateur de projection.

Exercice 3. On considère le problème

$$\begin{cases} \inf\{\frac{1}{2}(\mathbf{A}x, x) - (\mathbf{b}, x)\}, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases} \tag{2}$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que (2) possède une solution. Est elle unique ?
2. Résoudre complètement (2) .
3. Comparer cette solution avec celle du problème sans contraintes.

Exercice 4. Soit **A** une matrice $n \times n$ symétrique, définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$.
1. Montrer que les problèmes

$$\sup_{(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) \leq 1} (b, x) \quad \text{et} \quad \sup_{(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) = 1} (b, x)$$

sont équivalents et qu'ils ont une solution.
2. La calculer et montrer qu'elle est unique.

Exercice 5. (qui fait comprendre pourquoi on a introduit la méthode du gradient conjugué...). On considère une fonctionnelle $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme

$$J(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1 v_1^2 + \alpha_2 v_2^2), \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2.$$

On a bien sûr $J(0) = \inf_{v \in \mathbb{R}^2} J(v)$.

On veut montrer que sauf si le vecteur initial $u_0 = (u_1^0, u_2^0)$ a une de ses composantes nulles (que se passe-t-il dans ce cas?), la méthode du gradient à pas optimal ne converge jamais en un nombre fini d'itérations.

1. Montrer que si $\nabla J(u_k) \neq 0$ une condition nécessaire et suffisante pour que u_{k+1} soit solution du problème est que l'une des deux composantes u_i^k, $i = 1, 2$ soit nulle.

2. Calculer explicitement u_1^{k+1} et u_2^{k+1} et conclure.

Exercice 5. Soit $A \in M_{pn}(\mathbb{R})$ avec $p < n$ et A de rang p. On se donne $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'équation

$$Ax = b \tag{3}$$

a au moins une solution $x \in \mathbb{R}^n$.

On considère le problème d'optimisation :

$$(P) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\frac{1}{2}||x||^2,\ Ax = b\}.$$