

## Feuille d'exercices 1

Fonctions – Limites – Continuité – T.V.I.

Les exercices avec  $\star$  sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

**Exercice 1.**— Résoudre les équations suivantes et discuter, s'il y a lieu, en fonction des valeurs des paramètres.

- (a.)  $x^2 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$    (b.)  $x^2 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{C}$    (c.)  $x^2 + x + 1 = 0, x$  de la forme  $a + bi, a, b \in \mathbb{Q}$   
 (d.)  $x^2 + 2\lambda x + \lambda = 0, x \in \mathbb{R}, \lambda$  un paramètre réel   (e.)  $x^2 + 2\lambda x + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}, x$  un paramètre réel  
 (f.)  $x^2 y^2 + 2xy - 1 = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$    (g.)  $x^2 y^2 + 2xy - 1 = 0, x \in \mathbb{R}, y$  un paramètre réel

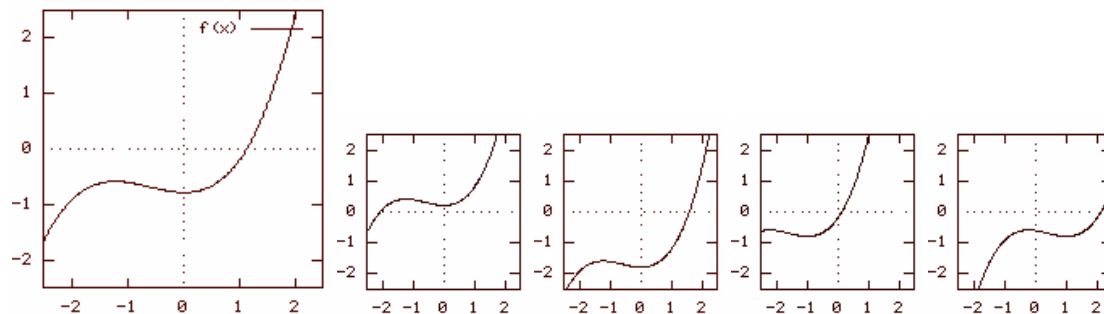
**Exercice 2.**— Résoudre les (in)équations suivantes et discuter, s'il y a lieu, en fonction des valeurs des paramètres.

- (a.)  $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$    (b.)  $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [0, \pi]$    (c.)  $\sin x = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$   
 (d.)  $\cos x = \frac{1}{2}, x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$    (e.)  $\cos x = \frac{1}{2}, x \in [0, \pi]$    (f.)  $\cos x = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$   
 (g.)  $\cos x + \sin x = \lambda, x \in \mathbb{R}, \lambda$  un paramètre réel   (h.)  $\cos x + 2\sin x = \lambda, x \in \mathbb{R}, \lambda$  un paramètre réel  
 (i.)  $\sin x - \cos x > 0, x \in [0, 2\pi]$    (j.)  $\sin x - \cos x > 0, x \in [-\pi, \pi]$   
 (k.)  $\sin x - \cos x > 0, x \in \mathbb{R}$

**Exercice 3.**— Résoudre les (systèmes) d'(in)équations suivantes et représenter graphiquement leurs solutions

- (a.)  $x - y = 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$    (b.)  $2x + y = 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$    (c.)  $x - y = -2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 (d.)  $x - y = 3$  et  $2x + y = 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$    (e.)  $x - y = 3$  et  $x - y = -2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 (f.)  $x - y < 3$  et  $2x + y > 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$    (g.)  $x - y < 3$  et  $x - y \geq -2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 (h.)  $x - y > 3$  et  $x - y < -2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$    (i.)  $x - y < 3$  et  $x - y \geq -2$  et  $2x + y > 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 (j.)  $(x - y - 3)(x - y + 2)(2x + y - 3) \geq 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

**Exercice 4.**— (Cet exercice est extrait de l'exercice "Fonctions Graphiques" de WIMS.) Le premier dessin représente le graphe d'une fonction  $f$ . Parmi les quatre dessins suivants lequel représente la fonction  $x \mapsto f(x) - 1$  ?



Même question pour les fonctions  $x \mapsto f(x) + 1, x \mapsto f(x + 1), x \mapsto f(x - 1)$ .

**Exercice 5.**— Soit  $a$  et  $b$  deux réels, et  $f$  la fonction donnée par  $f(x) = ax + b$ . On travaille dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Quelle est l'équation du graphe de  $f$ ? De quelle sorte de courbe s'agit-il?
2. Déterminer l'équation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe  $Ox$ , puis par la symétrie d'axe  $Oy$ , et enfin par la symétrie de centre  $O$ .
3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Pouvez-vous exprimer ces fonctions à l'aide de  $f$ ?
4. Déterminer l'équation de l'image du graphe de  $f$  par la symétrie d'axe  $y = x$ . A quelle condition la courbe obtenue est-elle le graphe d'une fonction?

**Exercice 6.**— Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \quad h(x) = \ln(4x + 3).$$

**Exercice 7.**— Pour chacune des formules suivantes, décrire le domaine  $D$  de définition naturel de la fonction définie par cette formule. Détailler les compositions et opérations algébriques en jeu pour affirmer la continuité de la fonction sur le domaine  $D$ .

1.  $f(x) = \sqrt{x^3 - 3}$
2.  $g(x) = \ln\{(x-1)^2(x+2)^4\}$
3.  $h(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - 2)$

**Exercice 8.**— On se donne trois fonctions réelles de variable réelle,  $f$ ,  $g$  et  $h$ . On ne dispose que des informations suivantes

1. Le domaine de définition de  $f$  est  $] -2, 2[$ ,  $f$  s'annule en  $-1, 0, 1$ , elle est strictement négative sur  $]0, 1[$  et strictement positive sur les autres points,
2. Le domaine de définition de  $g$  est  $[0, 3]$ ,  $g$  s'annule en  $0, 1, 2$ , elle est strictement positive en dehors de ces points.
3. Le domaine de définition de  $h$  est  $] -1, 1]$ ,  $h$  est positive sur son ensemble de définition.

Déterminer les domaines de définitions de

1.  $f + g$  définie par  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2.  $f.g.h$  définie par  $(f.g.h)(x) = f(x).g(x).h(x)$
3.  $\ln(f.g)$ ,  $\ln(f.g.h)$ ,  $\ln(g + h)$
4.  $\sqrt{f.g}$ ,  $\sqrt{g + h}$ .

**Exercice 9.**— Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

**Exercice 10.**— On suppose connu seulement le fait que  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

1. Déterminer la limite de  $\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$  lorsque  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .
2. Déterminer la limite de  $\frac{\tan x}{x}$  lorsque  $x \rightarrow 0$
3. En utilisant la formule de duplication du cosinus montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ .

**Exercice 11.**— Déterminer les limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s)

1.  $\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{-4x^3 + 3x + 1}$  en  $+\infty$ , en  $x_0 = 1$ .
2.  $(3x^4 - 2x^2)e^{-x}$  en  $+\infty$
3.  $(3x^2 - 2x)e^{-\sqrt{x}}$  en  $+\infty$
4.  $(3x^2 - 2x)e^{-2 \ln x}$  en  $+\infty$

5.  $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^x$  en  $+\infty$
6.  $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x}$  en  $+\infty$
7.  $\sqrt{x} \ln(x^2 + 2x)$  en  $x_0 = 0$ , en  $+\infty$
8.  $\frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x^2 + 2x)$  en  $x_0 = 0$ , en  $+\infty$

**Exercice 12.**— Dans cet exercice les fonctions notées  $\epsilon$  sont définies (au moins) dans un certain voisinage de 0 et ont pour limite 0 en 0.

1. Déterminer les domaines de définition, resp  $D_a, D_b$  des fractions rationnelles suivantes

$$\mathbf{a.} \ a(x) = \frac{2x+4}{x^2+x-2} \quad \mathbf{b.} \ b(x) = \frac{x-1}{x^4+2x^2+1}$$

2. Justifier l'existence de deux fonctions  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  telles que pour tout  $x$  dans  $D_a$

$$a(x) = \frac{2}{3} + \epsilon_1(x-4) \quad \text{et} \quad a(x) = -\frac{2}{5} + \epsilon_2(x+4)$$

Ces fonctions  $\epsilon$ 's sont-elles égales ?.

3. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Justifier l'existence d'une fonction  $\epsilon_{x_0}$  telle que pour tout  $h$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $b(x_0+h) = \frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1} + \epsilon(h)$ .

Donner une formule pour la fonction  $\epsilon_{x_0}$ .

**Exercice 13.-\*-** Soit  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par les formules

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|) \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une formule pour  $f \circ g$ , une pour  $g \circ f$ . Sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

**Exercice 14.**— Peut-on prolonger par continuité à tout  $\mathbb{R}$  les fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}^*$  :

$$f_1 : x \mapsto 2x + \frac{\sqrt{9x^2}}{x}, \quad f_2 : x \mapsto \sin(x) \log(|x|), \quad f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{x}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{(1+x^3)-1}{x}.$$

**Exercice 15.**— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 + x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue ?
2. Donner l'image par  $f$  de chacun des intervalles suivants :  $[-2, -1]$ ,  $[0, +\infty[$ ,  $[-1, 1]$ .

**Exercice 16.**— Donner un exemple de fonction  $f$  (éventuellement par son graphe) continue sur  $[0, 1]$ , telle que  $f(0)f(1) < 0$  et telle que l'équation  $f(x) = 0$  ait

1. une racine et une seule en  $x = \frac{1}{2}$ .
2. exactement deux racines distinctes.
3. une infinité de racines.

**Exercice 17.**— Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle  $I$  indiqué :

1.  $x^7 - x^2 + 1 = 0$  sur  $I = [-2, 0]$ .
2.  $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 1} - 3x = 2$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

3.  $\tan x = \frac{3}{2}x$  sur  $I = ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}[$ .

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de la dichotomie (à l'aide du moyen de calcul de son choix!).

**Exercice 18.**—

1. Montrer que l'équation  $\cos x = x$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  admet une solution dans l'intervalle  $[0, 1]$ .
2. Montrer que plus généralement, si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction continue alors l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  admet au moins une solution.
3. \* Donner des exemples de fonctions  $f$  comme dans le point précédent telles que
  - (i) l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  admet exactement une solution.
  - (ii) l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  admet exactement deux solutions.
  - (iii) l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  admet une infinité de solutions.

**Exercice 19.**— Montrer que l'équation  $\sin x = \frac{x}{x+1}$  d'inconnue  $x \in [0, +\infty[$  admet une infinité de solutions.

Indication: Introduire la fonction différence entre les deux membres de l'égalité et tester ses valeurs aux points de la forme  $2k\pi$  et  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 20.**— Pour un entier naturel  $n \geq 2$ , on considère la fonction polynomiale définie par

$$p_n(x) = x^n - n \cdot x + n - 2$$

1. Montrer que l'équation  $p_n(x) = 0$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  admet une unique solution que l'on note  $\alpha_n$ .
2. Quel est le signe de  $p_{n+1}(\alpha_n)$ ? La suite  $(\alpha_n)$  est-elle monotone?
3. A quelle condition naturelle sur  $\beta > 0$  peut-on affirmer que pour tous les entiers  $n$  à partir d'un certain rang,  $1 - \frac{\beta}{n} \leq \alpha_n \leq 1$ . Quelle est la limite de  $(\alpha_n)$ ?
4. A quelle condition naturelle sur  $\beta > 0$  peut-on affirmer qu'à partir d'un certain rang,  $\alpha_n \leq 1 - \frac{\beta}{n}$ ?

*Indication : il pourra être utile d'étudier le signe de la fonction  $\beta \mapsto e^{-\beta} + \beta - 2$*

5. Quelle est la limite de  $(n \cdot (1 - \alpha_n))$ ?

**Exercice 21.-\*-** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit

$$p_n(x) = x^3 - 3nx + n$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n$  a trois racines  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  telles que  $\alpha_n < -\sqrt{n}$ ,  $\frac{1}{3} \leq \beta_n \leq 1$ ,  $\gamma_n > \sqrt{n}$ .
2. Montrer que  $p_{n+1}(\beta_n) < 0$ . En déduire que  $\beta_n > \beta_{n+1}$ .
3. Montrer que la suite  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
4. Soit  $c$  la limite de la suite  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que  $c = 1/3$ .

**Exercice 22.-\*-** On considère un cycliste qui parcourt 90km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction  $d$  donnant la distance parcourue jusqu'à un instant  $t$  est continue?
2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45km.
3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle  $I$ , alors leur moyenne est aussi dans  $I$ . Qu'en est-il pour 4 points?, pour  $n$  points?
4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80mn pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 30km.
5. Généralisation?