Feuille d'exercices 2

Dérivées–Théorème des accroissements finis

Les exercices avec $\star$ sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

Exercice 1.— Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :

$$f(x) = \sqrt{1 + (x\cos x)^2}, \qquad g(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \qquad k(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}.$$

Exercice 2.— Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + \sin(x), \quad g(x) = x^3\cos(x)$$

$$h(x) = e^x\sin(x), \quad k(x) = x^x$$

Exercice 3.— Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable en 0, mais que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.— Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

$$j(x) = \frac{cos(x)}{sin^2(x)}, k(x) = \frac{1}{1+sin(x)}, l(x) = \frac{x}{2+cos(x)}$$

Exercice 5.— Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Donner une formule pour sa dérivée.
2. Quelle est la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 1$? La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
Exercice 6.— Soit a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = a(x^2-1) + b \text{ si } x > 1.$$

Déterminer a et b de manière à ce que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 7.— Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction f soit dérivable en 0. On donne

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si} \quad x \geq 0 \\ bx + 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exercice 8.— Donner le domaine de définition, prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},\ g(x) = \sin\sqrt{x},\ h(x) = \cos\sqrt{x}$$

Exercice 9.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$. Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.
Exercice 10.— Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
b) On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.
Exercice 11.— Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.
Exercice 12.— **1.** Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.
Exercice 13.— **1.** Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1)\sin x$.
2. Montrer que l'équation $(x^2 + 1)\cos x + 2x \sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.
Exercice 14.— Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Démontrer, sans grands calculs, que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet exactement trois solutions.
Exercice 15.— Montrer que si une fonction polynomiale admet n (un entier) racines dans $\mathbb{R}$ alors sa dérivée admet $n - 1$ racines.

Est-il vrai, *a contrario* , que si la dérivée admet $n-1$ racines, alors la fonction admet au moins n racines ? Donner un exemple.
Exercice 16.— Montrer les inégalités suivantes
1. Pour tous réels a et b, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$
2. Pour tous réels x et h, $|\cos(x + h) - \cos x| \leq |h|$
3. Pour tout réel x, $|e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$

Exercice 17.— **1.** A l'aide du théorème des acroissements finis montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x + 1) - \ln x)$ et $\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x + 1) - \ln x)$.
3. En deduire que $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x})^x$.

Exercice 18.— Déterminer les extrema locaux des fonctions définies par les formules suivantes ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance (i.e. construisez les tableaux de variations de ces fonctions)

a. x^4,	**b.**x^5,	**c.** $\frac{x}{x^2+1}$
d. $\frac{\ln x}{x}$,	**e.** $x \ln x$,	**f.**$e^x \sin x$

Exercice 19.— Déterminer les extrema locaux des fonctions définies par les formules suivantes ainsi que les intervalles de croissance et de décroissance (i.e. construisez les tableaux de variations de ces fonctions)

a. $\cos x + \sin x$,	**b.**$\cos x - \sin x$
c.$\frac{1}{2}x - \sin x$,	**d.** $x + 2\cos x$