Université de Paris XI — **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques — **1er semestre 2008–2009**

Feuille d'exercices 4

Fonctions réciproques, courbes paramétrées.

Les exercices avec $\star$ sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

Exercice 1.—Donnez les fonctions réciproques des fonctions f_1 et f_2 définies comme suit :

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ (1-x)+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Exercice 2.—

- Calculez $\tan(\alpha+\beta)$ en foncction de $\tan\alpha$ et de $\tan\beta$
- En déduire $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$.

Exercice 3.—Montrez que $\arcsin(\frac{4}{5}) = 2\arctan(\frac{1}{2})$.

Exercice 4.—On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$. Calculez $f'(x)$ et en déduire la valeur de $f(x)$ pour $x > 0$ et $x < 0$.

Exercice 5.—-Simplifiez les expressions suivantes

- $\tan(2\arctan(x))$
- $\arcsin(2\sin(x)\cos(x))$
- $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

Exercice 6.—-Comparez $\arctan x + \arctan a$ et $\arctan\frac{x+a}{1-ax}$ (on pourra comparer les dérivées des deux fonctions, en faisant attention au domaine de validité des calculs).

Exercice 7.—On considère les fonctions définies par

- $f(x) = \arctan\frac{2x}{1-x^2}$
- $g(x) = \arctan\frac{x^2\sqrt{3}-2x-\sqrt{3}}{x^2+2x\sqrt{3}-1}$
- $h(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

Donnez le domaine de définition de chacune de ces fonctions et en calculant leur dérivées respectives établir des relations simples entre ces fonctions et la fonction arctan

Exercice 8.—Déterminez les réels m pour que la fonction définie par
$f(x) = \ln(x^3+x^2+mx)$ soit une bijection de $]0,+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Exercice 9.—Montrez que $f(x) = \ln(x^2-2x+3)$ est une bijection de $[1+\infty[$ dans $[\ln 2, \infty[$. Calculez la fonction réciproque f^{-1} et sa dérivée. Tracez les courbes représentatives de f et f^{-1} sur une même figure.

Exercice 10.—Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \arccos(x^2+2x-1)$. Calculez la dérivée de f, et précisez le domaine de validité de ce calcul.

Exercice 11 Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)dx; \quad \int \arcsin(x)dx; \quad \int \arccos(x)dx; \quad \int x\arcsin(x)dx.$$

Exercice 11.—Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction de classe C^1 telle que $f'(x) > 0$ si x est dans $]0,1[$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

- Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ dans lui même.
- Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(y)dy = xf(x)$.
- Rappeler les relations de nature géométrique entre le graphe de f et celui de f^{-1}. En déduire une démonstration géométrique de l'égalité précédente.

Exercice 12.—On considère la courbe (Γ) définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

- Etudiez les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
- Déterminez les symétries de la courbe (Γ)
- Tracez (Γ).

Exercice 13.—Construire la courbe définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{t} \\ y(t) = \frac{t+1}{t(t-1)} \end{cases}$$

Exercice 14.—Construire la courbe définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4t^2}{1-t} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$