

TEST DE MATHÉMATIQUES
questions pour le contrôle en TD
la semaine du 27 septembre 2010

Attention, ce document comporte 2 pages (et 20 questions).

Pour chacune des assertions 1 à 10,

- dire si elle est vraie ou fausse ;
- la démontrer ou en donner un contre-exemple.

1. Pour tous réels x et y , $(x < y < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} > \frac{1}{x}\right)$.

2. Pour tous réels x et y non nuls, $(x < y) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} < 1\right)$.

3. L'assertion \mathcal{P} suivante est vraie.

$$\mathcal{P} : \quad (\forall t \in \mathbf{R}) (\forall y \in \mathbf{R}) \left(((t \leq 1) \text{ et } (y > 0)) \Rightarrow (ty < y) \right).$$

4. L'assertion \mathcal{Q} suivante est vraie.

$$\mathcal{Q} : \quad (\forall t \in \mathbf{R}) \left((t \geq 1) \Rightarrow ((\exists y \in \mathbf{R}) (ty > y)) \right).$$

5. Pour tout entier n strictement positif, $((n \mid 16) \text{ et } (n^2 \neq n)) \Rightarrow (n \text{ pair})$.

6. Soient A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble E .

$$\text{Alors } C \cup (B \setminus A) = (C \cup B) \setminus A.$$

7. Soient A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble E .

$$\text{Alors } C \setminus (B \cup A) = (C \setminus A) \setminus B.$$

8. Soient A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble E .

$$\text{Alors } C \cap (B \setminus A) = (C \cap B) \setminus A.$$

9. Soient A , B et C des sous-ensembles d'un ensemble E .

Le complémentaire de $A \cup (B \cap C)$ est $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.

(On note ici \overline{F} le complémentaire d'une partie F de E .)

10. Soit $f : A \rightarrow B$ une application d'un ensemble A dans un ensemble B . Alors, pour tout $A_1, A_2 \subset A$ on a $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$ et pour tout $B_1, B_2 \subset B$ on a $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Les questions 10 à 18 portent sur des manipulations d'assertions ; certaines se réfèrent aux assertions \mathcal{P} et \mathcal{Q} des questions 3 et 4. Pour chacune,

- dire si la manipulation est correcte ou non
- si non, rétablir la conclusion exacte.

11. La négation de $((x^2 \geq 9) \text{ ou } (x \in]2, 5]))$ est $(x \in [-3, 2])$.

12. La négation de l'assertion \mathcal{P} de la question 3 est

$$(\exists t \in \mathbf{R}) (\exists y \in \mathbf{R}) (((t \leq 1) \text{ et } (y > 0)) \text{ et } (ty \geq y)).$$

13. La négation de l'assertion \mathcal{Q} de la question 4 est

$$(\exists t \in \mathbf{R}) ((t \geq 1) \text{ ou } ((\forall y \in \mathbf{R}) (ty \leq y))).$$

14. La réciproque de \mathcal{P} est l'assertion

$$(\forall t \in \mathbf{R}) (\forall y \in \mathbf{R}) ((ty < y) \Rightarrow ((t \leq 1) \text{ ou } (y > 0))).$$

15. La contraposée de \mathcal{Q} est l'assertion

$$(\forall t \in \mathbf{R}) (((\exists y \in \mathbf{R}) (ty \leq y)) \Rightarrow (t < 1)).$$

16. L'assertion « étant donnés trois entiers relatifs, si leur produit est non nul, alors chacun d'entre eux est non nul » se traduit par

$$(\forall a \in \mathbf{Z}) (\forall b \in \mathbf{Z}) (\forall c \in \mathbf{Z}) ((abc \neq 0) \Rightarrow ((a \neq 0) \text{ et } (b \neq 0) \text{ et } (c \neq 0))).$$

17. L'assertion « une condition nécessaire pour qu'une année soit bissextile est que son millésime soit un multiple de 4 » se traduit par

$$\text{L'année } n \text{ est bissextile} \Rightarrow n \text{ est un multiple de 4.}$$

18. L'assertion « en S1-IFIPS, il y a dans chaque groupe de TD deux étudiants qui ont leur anniversaire le même jour » se traduit par

$$(\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}) (\exists x \in G_i) (\exists y \in G_i) ((x \neq y) \text{ ou } (\text{anniv}(x) = \text{anniv}(y))).$$

Les questions 19 et 20 concernent ensembles et applications.

19. Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $f : E \rightarrow E$ la fonction qui associe à tout $x \in E$ le reste de $x+12$ dans la division par 5. Écrire les valeurs que la fonction f^5 prend sur tous les éléments de l'ensemble E , où f^5 désigne la fonction $f \circ f \circ f \circ f \circ f$.

20. Pour tout k entier, $k \geq 1$, soit $A_k = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ est divisible par } k\}$. Déterminer les ensembles $\bigcap_{k=1}^5 A_k$ et $\bigcap_{k \in \mathbf{N}, k > 5} A_k$.