Polytech' Paris-Sud — 2011–2012
Orsay — PeiP1-S1-MathInfo

Test de Mathématiques
questions pour le contrôle en TD
Septembre 2011

Attention, ce document comporte 2 pages (et 20 questions).

Pour chacune des assertions 1 à 10,
– *dire si elle est vraie ou fausse ;*
– *la démontrer ou en donner un contre-exemple.*

1. Pour tous réels x et y, $(\, x < y < 0\,) \Leftrightarrow \big(\, \frac{1}{y} > \frac{1}{x}\,\big)$.

2. Pour tous réels x et y non nuls, $(\, x < y\,) \Leftrightarrow \big(\, \frac{x}{y} < 1\big)$.

3. L'assertion $\mathcal{P}$ suivante est vraie.
   $\mathcal{P}$: $\qquad (\forall t \in \mathbf{R})\,(\forall y \in \mathbf{R})\ \Big(\big(\,(t \leqslant 1) \text{ et } (y > 0)\,\big) \ \Rightarrow\ (t\,y < y)\Big)$.

4. L'assertion $\mathcal{Q}$ suivante est vraie.
   $\mathcal{Q}$: $\qquad (\forall t \in \mathbf{R})\ \Big((t \geqslant 1) \ \Rightarrow\ \big(\,(\exists y \in \mathbf{R})\,(t\,y > y)\,\big)\Big)$.

5. Pour tout entier n strictement positif, $((n \mid 16) \text{ et } (n^2 \neq n)) \Rightarrow (n \text{ pair}))$.

6. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.
   Alors $C \cup (B \setminus A) = (C \cup B) \setminus A$.

7. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.
   Alors $C \setminus (B \cup A) = (C \setminus A) \setminus B$.

8. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.
   Alors $C \cap (B \setminus A) = (C \cap B) \setminus A$.

9. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E.
   Le complémentaire de $A \cup (B \cap C)$ est $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.
   (On note ici $\overline{F}$ le complémentaire d'une partie F de E.)

10. Soit $f : A \to B$ une application d'un ensemble A dans un ensemble B. Alors, pour tout $A_1, A_2 \subset A$ on a $f(A_1) \cap f(1_2) = f(A_1 \cap A_2)$ et pour tout $B_1, B_2 \subset B$ on a $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Les questions 10 à 18 portent sur des manipulations d'assertions ; certaines se réfèrent aux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des questions 3 et 4. Pour chacune,
– dire si la manipulation est correcte ou non
– si non, rétablir la conclusion exacte.

11. La négation de $((x^2 \geqslant 9)$ ou $(x \in \left]2,5\right]))$ est $(x \in \left[-3,2\right])$.

12. La négation de l'assertion $\mathcal{P}$ de la question 3 est

$$(\exists\, t \in \mathbf{R})\,(\exists\, y \in \mathbf{R})\ \ (((t \leqslant 1) \text{ et } (y > 0)) \text{ et } (t\,y \geqslant y)).$$

13. La négation de l'assertion $\mathcal{Q}$ de la question 4 est

$$(\exists\, t \in \mathbf{R})\ \ ((t \geqslant 1) \text{ ou } ((\forall\, y \in \mathbf{R})\,(t\,y \leqslant y))).$$

14. La réciproque de $\mathcal{P}$ est l'assertion

$$(\forall\, t \in \mathbf{R})\,(\forall\, y \in \mathbf{R})\ \ ((t\,y < y) \Rightarrow ((t \leqslant 1) \text{ ou } (y > 0))).$$

15. La contraposée de $\mathcal{Q}$ est l'assertion

$$(\forall\, t \in \mathbf{R})\ \ (((\exists\, y \in \mathbf{R})\,(t\,y \leqslant y)) \Rightarrow (t < 1)).$$

16. L'assertion « *étant donnés trois entiers relatifs, si leur produit est non nul, alors chacun d'entre eux est non nul* » se traduit par

$$(\forall\, a \in \mathbf{Z})\,(\forall\, b \in \mathbf{Z})\,(\forall\, c \in \mathbf{Z})\,((a\,b\,c \neq 0) \Rightarrow ((a \neq 0) \text{ et } (b \neq 0) \text{ et } (c \neq 0))).$$

17. L'assertion « *une condition nécessaire pour qu'une année soit bissextile est que son millésime soit un multiple de 4* » se traduit par

$$\text{L'année } n \text{ est bissextile } \Rightarrow\ n \text{ est un multiple de } 4.$$

18. L'assertion « *en S1-IFIPS, il y a dans chaque groupe de TD deux étudiants qui ont leur anniversaire le même jour* » se traduit par

$$(\forall\, i \in \{1,2,3,4\})\,(\exists\, x \in G_i)\,(\exists\, y \in G_i)\,((x \neq y) \text{ ou } (\text{anniv}(x) = \text{anniv}(y))).$$

Les questions 19 et 20 concernent ensembles et applications.

19. Soit $E = \{0,1,2,3,4\}$ et $f : E \to E$ la fonction qui associe à tout $x \in E$ le reste de $x+12$ dans la division par 5. Écrire les valeurs que la fonction f^5 prend sur tous les éléments de l'ensemble E, où f^5 désigne la fonction $f \circ f \circ f \circ f \circ f$.

20. Pour tout k entier, $k \geqslant 1$, soit $A_k = \{n \in \mathbb{N} \ :\ n \text{ est divisible par } k\}$. Déterminer les ensembles $\cap_{k=1}^{5} A_k$ et $\cap_{k \in \mathbb{N},\, k>5} A_k$.