Université Paris-Sud 2009-2010
S1 IFIPS Compléments maths

Feuille d'exercices n^{0}1

Exercice 1 *Soient x, y, a et b des nombres réels. Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie (et le prouver), ou bien fausse (et donner un contre-exemple).*

1. $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$
2. $x^2 < 4 \Rightarrow x < 3$
3. $(x < 2 \text{ et } y < 3) \Rightarrow 2x + 5y < 21$
4. $(xy \neq 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
5. $(xy > 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Exercice 2 *Soient a, b et c trois nombres entiers relatifs. La notation* $\mathbf{b} \mid \mathbf{a}$ *se lit "b divise a" et signifie "a est divisible par b", "a est un multiple de b", ou "b est un diviseur de a". Par exemple, $2 \mid 14$ se lit 2 divise 14, et exprime le fait que 2 est un diviseur de 14, ou, si on préfère, que 14 est un multiple de 2, ou que 14 est divisible par 2. Dire, en le justifiant, si les implications suivantes sont vraies ou fausses.*

1. $(b \mid a \text{ et } b \mid c) \Rightarrow b \mid (a + c)$
2. $b \mid (a + c) \Rightarrow (b \mid a \text{ et } b \mid c)$
3. $(b \mid a \text{ et } b \mid (a + c)) \Rightarrow b \mid c$
4. *Si b est premier avec a et avec c alors b ne divise pas $a + c$.*

Exercice 3 *Traduire les assertions suivantes, portant sur une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, en langage courant.*

$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})((x < y) \text{ et } (f(x) \geq f(y))). \tag{1}$$

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})\Big((x < y) \implies \big((\exists z \in \mathbf{R})(\exists t \in \mathbf{R})((x < z < t < y) \text{ et } (f(z) \geq f(t)))\big)\Big). \tag{2}$$

Exercice 4 *Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des nombres entiers naturels que l'on pourra noter m et n, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec "et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$") et les prouver.*

1. *Le produit de deux nombres pairs est–il pair ?*
2. *Le produit de deux nombres impairs est–il pair ou impair ?*
3. *Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est–il pair ou impair ?*
4. *Un entier est impair si et seulement si son carré est impair ?*

Exercice 5 *Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.*

1. $(\forall i \in \{1,2,3\})(\exists a \in \mathbf{R})(f_i(a) = 1)$.
2. $(\exists i \in \{1,2,3\})(\forall a \in \mathbf{R})(f_i(a) = 1)$.
3. $(\exists a \in \mathbf{R})(\forall i \in \{1,2,3\})(f_i(a) = 1)$.
4. $(\forall a \in \mathbf{R})(\forall i \in \{1,2,3\})(f_i(a) = 1)$.

Exercice 6 *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra noter H l'ensemble des hommes, M l'ensemble des mathématiciens et F l'ensemble des farceurs). Ecrire la réciproque ou la réciproque de la négation, suivant les cas.*

1. *Les mathématiciens sont tous des farceurs.*
2. *Les mathématiciens ne sont jamais des farceurs.*
3. *Il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs.*
4. *Il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens.*
5. *Certains mathématiciens sont des farceurs.*

Exercice 7
1. *Ecrire les assertions suivantes, leurs négations et leurs réciproques avec des quantificateurs. Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.*
   (a) *Tout entier naturel divisible par* 6, *est divisible par* 3.
   (b) *Tout entier naturel divisible par* 2 *et par* 3, *est divisible par* 6.
   (c) *Tout entier naturel divisible par* 2 *et par* 14, *est divisible par* 28.
2. *Etre divisible par 3 est-il une condition nécessaire ? suffisante ? pour être divisible par 6 ?*

Exercice 8 *Voici une saynète extraite d'un ouvrage de Lewis Carrol. Un témoin a assisté à un cambriolage. Sa déposition est confuse, mais il en ressort quelques informations certaines. Chacune des assertions suivantes est vraie :*

1. *Si le cambrioleur a un complice, alors il est venu en voiture.*
2. *Le cambrioleur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé ou bien le cambrioleur avait un complice et avait la clé.*
3. *Le cambrioleur avait la clé.*

Que peut-on en conclure ? Si on remplace la dernière par le cambrioleur n'avait pas la clé, *peut-on conclure ?*

Exercice 9
1. *Voici deux phrases. Ont elles le même sens ?*
   a. Quand il fait chaud, l'absence de vent provoque des pics de pollution.
   b. Chaleur et absence de vent provoquent des pics de pollution.
2. *Soient A, B et C des assertions. Parmi les assertions suivantes, certaines sont équivalentes. Lesquelles ?*
   (a) $\mathcal{P}_1$: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
   (b) $\mathcal{P}_2$: $(A$ *et* $B) \Rightarrow C$.
   (c) $\mathcal{P}_3$: $(A$ *ou* $B) \Rightarrow C$.
   (d) $\mathcal{P}_4$: $(A \Rightarrow C)$ *et* $(B \Rightarrow C)$.

   Supposons que A est fausse, B et vraie, C est fausse. Les assertions $\mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_4$ sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 10 *Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer (n est un nombre entier naturel, x et y sont des nombres réels) :*

1. *n premier $\Rightarrow ((n = 2)$ ou $(n$ impair$))$.*
2. *$xy \neq 0 \Rightarrow ((x \neq 0)$ et $(y \neq 0))$.*
3. *$(x \neq y) \Rightarrow [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$.*

Exercice 11 *Soient n et p des entiers naturels ; montrer que soit np est pair, soit $n^2 - p^2$ est divisible par 8.*

Exercice 12 *Soit n un entier naturel non nul ; montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel p tel que $n^2 + 1 = p^2$.*

Exercice 13 *Démontrer par l'absurde que l'équation $12n^3 - 7n = 1$ n'a aucune solution dans $\mathbf{Z}$.*

Exercice 14 *Pour chacune des questions suivantes, on pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou chercher un autre type de preuve.*

1. *Pour quels entiers naturels n a–t–on $n^2 < n!$?*
2. *Démontrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.*
3. *Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.*

Exercice 15* *Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On rappelle que le nombre $\binom{n}{k}$ de combinaisons de n objets pris k à k vaut $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.*

1. *Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*
2. *En déduire la formule du binôme de Newton : pour tous nombres réels a et b et tout n dans $\mathbf{N}$,*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$$
3. *Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.*
4. *Une personne veut inviter au moins deux personnes parmi six de ses amis. Combien a–t–elle de possibilités ?*

Université Paris-Sud 2009-2010
S1 IFIPS Compléments maths

FEUILLE D'EXERCICES N^0 2,

Exercice 1 *1. Représenter graphiquement les ensembles*

$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x + y < 1\right\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x + y > -1\},$
$A_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x + y| < 1\}, \quad A_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x| + |y| < 1\},$
$A_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ |x - y| < 1\}.$

2. *En déduire une démonstration géométrique de l'équivalence*

$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Leftrightarrow |x| + |y| < 1.$$

(On montrera l'égalité de deux ensembles en détaillant chacune des deux inclusions).

3. *On rappelle que l'*inégalité triangulaire *s'énonce*

$$(\forall a \in \mathbf{R})\,(\forall b \in \mathbf{R})\,(|a + b| \leq |a| + |b|).$$

Montrez l'équivalence précédente en utilisant l'inégalité triangulaire.

Exercice 2 *On pose* $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \mid \ y > x^2 - 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \mid \ y < 1 - x^2\}$.

1. *Représenter graphiquement* A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ *et* $\overline{A \cup B}$. *Ecrire chacun de ces ensembles sous la forme* $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \mid \ \ldots\}$.

2. *Soient* A *et* B *deux parties d'un ensemble quelconque* E. *Exprimer les ensembles* $\overline{A \cap B}$ *et* $\overline{A \cup B}$ *à l'aide de* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *et prouver les égalités données.*

Exercice 3 *1. Représenter graphiquement l'ensemble* F *des couples* $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ *tels que*

$$x^2 + y^2 \leq 9 \text{ et } (x + y > 3 \text{ ou } xy < 2).$$

2. *Exprimer l'ensemble* F *sous la forme* $F = A \cap (B \cup C)$ *où* A, B *et* C *sont trois ensembles que l'on définira à partir des données de la question 1. Vérifier graphiquement que* F *s'exprime également à partir de* $A \cap B$ *et* $A \cap C$.

3. *Soient* A, B *et* C *trois sous-ensembles d'un ensemble* E *quelconque. Montrer que*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 4 *Soient* $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y < 1\}$ *et* $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x + y > 0\}$.

1. *Soit* Q *l'ensemble des points de* A *qui ne sont pas dans* B *ou pas dans* C. *Dessiner* Q. *Ecrire* Q *comme la différence de deux ensembles.*

2. *Dessiner les ensembles* $R = A \setminus B$ *et* $S = A \setminus C$. *Quelle est leur réunion ?*

3. *Plus généralement, montrer que si* A, B *et* C *sont trois sous-ensembles d'un ensemble* E, *alors* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 5 *Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point.*

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\Big[, \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big]0, \frac{1}{n}\Big[, \quad I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big[n, +\infty\Big[, \quad I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[.$$

Exercice 6 *On définit deux applications sur* $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ *par* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ *et* $g : x \mapsto 1-x$.

1. *Vérifier que* f *et* g *envoient* $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ *dans lui-même.*
2. *Calculer les composées* $f \circ g$ *et* $g \circ f$. *Que constate-t-on ?*

Exercice 7 *On considère l'application* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *définie pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *par* $f(x) = x^2$.

Déterminer, par une méthode graphique, les ensembles suivants :
$f([-5,-2])$, $\quad f([-1,3])$, $\quad f([-5,-2] \cup [-1,3])$ $\quad$ *et* $\quad f([-5,-2] \cap [-1,3])$.

Exercice 8 *Soit* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une application. Soient* $a, b \in \mathbf{R}$ *tels que* $a < b$, *et* $I = [a,b]$. *L'image* $g(I)$ *est-elle un intervalle de* $\mathbf{R}$ *? Si* $g(I)$ *est un intervalle, est-il nécessairement borné ? Fermé ? Donner des contre-exemples.*

Exercice 9 *Soit* E *l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 1. Soit* $f : E \to E$ *l'application qui à un entier naturel* $n > 1$ *associe le plus petit diviseur positif de* n *autre que 1.*

1. *Soit* $A = \{2, 3, \ldots, 10\}$. *Déterminer l'image de* A *par* f.
2. *Déterminer l'image réciproque par* f *de l'ensemble* $\{3\}$.

Exercice 10 *Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Soient* $A = [0,1[$, $B =]1/2, 1]$, $C = [1,2]$, $D =]1,3]$. *Par une méthode graphique, déterminer les images réciproques* $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$, $f^{-1}(A \cap B)$, $f^{-1}(A \cup B)$. *Comparer à* $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 11

1. *Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = x^2$. *Soit* $A = [1, +\infty[$, $B = [-2, 0]$, $G = [0,1]$. *Par une méthode graphique, déterminer* $H = f(B)$, $K = H \setminus G$, $C = f^{-1}(K)$, $D = A \cap C$. *Vérifier que pour tout* $x \in D$ *il existe* $x' \in B$ *tel que* $f(x') = f(x) \notin G$.
2. *Soient* E *et* F *des ensembles,* $f : E \to F$ *une application,* $A \subset E$, $B \subset E$, $G \subset F$. *Vérifier que l'ensemble des éléments de* A *dont l'image par* f *n'est pas dans* G *et coïncide avec celle d'un élément de* B *est* $A \cap f^{-1}(f(B) \setminus G)$.

Exercice 12 *Soit* $E = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$. *L'application* $f : E \to E$ *définie par* $f(z) = z^2$ *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Exercice 13 *Une maison d'édition exploite une base de données contenant les noms et années de naissance de ses auteurs, les titres et les années de parution des livres. On note A l'ensemble des auteurs, L l'ensemble des livres. On note Y l'ensemble des entiers compris entre 1901 et 2000 et Z l'ensemble des entiers compris entre 1945 et 2005. On note $n : A \to Y$ la fonction qui à un auteur associe son année de naissance, et $p : L \to Z$ la fonction qui à un livre associe son année de parution. On note $B \subset A \times L$ l'ensemble des couples* (auteur,ouvrage de cet auteur). *On suppose que chaque livre n'a qu'un auteur.*

1. *Que signifie le fait que l'application $p : L \to Z$ n'est pas surjective ? Répondre en langage courant, puis par une formule mathématique. Si la maison d'édition a 30 livres, p est-elle surjective ?*

2. *Que signifie le fait que l'application $c : B \to Y \times Z$ définie par $c(a, l) = (n(a), p(l))$ n'est pas injective ? Répondre en langage courant, puis par une formule mathématique. Si la maison d'édition a 10000 livres, c est-elle injective ?*

3. *Décrire par une formule l'ensemble C des livres dont l'auteur est né en 1955 ou plus tôt.*

4. *On note Z' l'ensemble des entiers compris entre 1995 et 2005. Soit $F = p^{-1}(Z')$ et G la différence $G = C \setminus F$. Décrire G en langage courant et par une formule.*

5. *On note Y' l'ensemble des entiers compris entre 1901 et 1955. On pose $D = n^{-1}(Y')$. Décrire D en langage courant et par une formule. L'ensemble C est-il contenu dans D ?*

Exercice 14 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Montrer que*

$$(g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective}).$$

Exercice 15 *Soient f et g deux fonctions définies dans une partie E de $\mathbf{R}$.*

1. *Montrer que si f et g sont croissantes sur E, alors la fonction somme $f + g$ est croissante sur E.*

2. *Montrer que si f et g sont positives et croissantes sur E, alors la fonction produit fg est croissante sur E.*

3. *On suppose que $f \circ g$ est définie sur E. Montrer que si f et g sont toutes deux croissantes ou bien toutes deux décroissantes sur E, alors $f \circ g$ est croissante sur E.*

4. *Etudier la monotonie (en utilisant la monotonie des fonctions logarithme et exponentielle et sans utiliser une variation de fonction) de la fonction $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par :*

$$h(x) = (\ln(e + x^2) - 1)e^{(2\sqrt{x}+3)}.$$

Soit a un nombre réel, $a > 0$, la fonction h est-elle bornée sur l'intervalle $[0, a]$?