Math 203 – Analyse et convergence II
–
Examen partiel, 10 mars 2016

Durée : 2h ; documents et calculettes interdits.
Chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.
Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.
Il est toujours possible d'admettre la réponse à une question précédente pour traiter les suivantes.

Exercice 1 (9 points)**.** Considérer la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)(2 + \sin(n^2 x))}{1 + n^\alpha x^4}.$$

1. Démontrer que pour $\alpha > 0$ cette suite de fonctions converge simplement vers 0.
2. Prouver que pour $\alpha = 2$ il ne s'agit pas d'une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ pour $0 < \alpha < 2$?
4. Et pour $\alpha > 2$?
5. Prouver que, pour tout $\alpha > 0$ et tout $a > 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Solution.

1. Distinguons $x = 0$ et $x \neq 0$. Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$ pour tout n, donc on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$ on utilise
$$|f_n(x)| \leq \frac{3}{1 + n^\alpha x^4}$$
et le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$, donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
2. On a
$$||f_n||_\infty \geq f_n(n^{-1/2}) = \frac{\sin(1)(2 + \sin(n^{3/2}))}{1 + 1} \geq \frac{\sin(1)}{2}.$$
Cette quantité ne tend pas vers 0, donc on n'a pas $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_\infty = 0$.
3. Pour $0 < \alpha < 2$ on n'a pas non plus convergnce uniforme, parce que
$$||f_n||_\infty \geq f_n(n^{-1/2}) = \frac{\sin(1)(2 + \sin(n^{3/2}))}{1 + n^{\alpha-2}} \geq \frac{\sin(1)}{1 + n^{\alpha-2}},$$
et le terme à droite converge, pour $n \to \infty$, vers $\sin(1) > 0$.
4. Pour $\alpha > 2$ la situation est plus difficile. On montrera, en utilisant la définition avec les quantificateurs, qu'on a bien convergence uniforme. Fixons $\varepsilon > 0$. On veut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f_n(x)| \leq \varepsilon$. Or, si $n|x|^2 \leq \varepsilon/3$ on a
$$|f_n(x)| \leq \frac{3|\sin(nx^2)|}{1 + n^\alpha x^4} \leq 3|\sin(nx^2)| \leq 3n|x|^2 \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
Si par contre $n|x|^2 > \varepsilon/3$ alors on utilise
$$|f_n(x)| \leq \frac{3}{1 + n^\alpha x^4} \leq \frac{3}{n^\alpha x^4} \leq \frac{3}{n^{\alpha-2}(\varepsilon/3)^2} = \frac{27}{n^{\alpha-2}\varepsilon^2}.$$
Il suffit de choisir n_0 tel que
$$\frac{27}{n_0^{\alpha-2}\varepsilon^2} \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $n_0^{\alpha-2} \geq \varepsilon^3/27$, et on a donc $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x et tout $n \geq n_0$.
Si vous n'aimez pas les ε, ne vous inquiétez pas, il est possible de faire sans cela. Écrivez juste

$$|f_n(x)| \leq \frac{3nx^2}{1+n^\alpha x^4}$$

et cherchez

$$\sup\left\{\frac{3nx^2}{1+n^\alpha x^4} \;:\; x \in \mathbb{R}\right\} = \sup\left\{\frac{3ny}{1+n^\alpha y^2} \;:\; y \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

Le sup à droite peut se calculé en étudiant la fonction

$$g(y) = \frac{3ny}{1+n^\alpha y^2}.$$

Comme on a

$$g'(y) = \frac{3n - 3n^{1+\alpha}y^2}{(1+n^\alpha y^2)^2},$$

le max de la fonction g est atteint en prenant $y = n^{-\alpha/2}$ (faire un tableau de variations). Ceci permet de dire

$$||f_n||_\infty \leq g(n^{-\alpha/2}) = \frac{3n^{1-\alpha/2}}{1+1} = \frac{3}{2}n^{1-\alpha/2}$$

et cette quantité tend vers 0 pour $n \to \infty$, à condition que $\alpha/2 > 1$, c'est-à-dire pour $\alpha > 2$.

5. Pour prouver la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ on peut utiliser

$$|f_n(x)| \leq \frac{3}{1+n^\alpha x^4} \leq \frac{3}{n^\alpha a^4} \to 0.$$

Exercice 2 (9 points)**.** Considérons une série entière de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Prouver que la série converge pour $|x| < 1$ et en calculer la somme dans chacun des cas suivants

1. $a_n = 0$ pour n impair et $a_n = 1$ pour n pair ;
2. $a_n = 0$ pour n pair et $a_n = 1$ pour n impair ;
3. $a_n = 1/n$ pour $n \geq 2$ pair et $a_n = 0$ sinon ;
4. les coefficients a_n sont tous dans $\{-1, 0, 1\}$ et sont tels que $a_n - n$ est divisible par 3.

Enfin,

5. démontrer que dans tous les cas ci-dessus la convergence a lieu exclusivement pour $|x| < 1$.

Solution.

1. On a la série $\sum_{k\geq 0} x^{2k}$ (en utilisant $n = 2k$). On sait que la série géométrique $\sum_{k\geq 0} y^k$ converge si et seulement si $|y| < 1$ et sa somme est égale à $1/(1-y)$. On peut appliquer cela à $y = x^2$. On a donc convergence pour $|x| < 1$ et la somme est $1/(1-x^2)$.
2. Cette fois-ci on a $\sum_{k\geq 0} x^{2k+1}$ (en utilisant $n = 2k+1$). On peut factoriser un x et revenir à la série précédente. On a donc convergence pour $|x| < 1$ et la somme est $x/(1-x^2)$.

3. Dans ce cas on a la série
$$\sum_{k\geq 1}\frac{x^{2k}}{2k}$$
(en utilisant $n=2k$). La convergence est garantie pour $|x|<1$ par exemple parce que chaque terme est majoré en valeur absolue par $|x|^{2k}$ et on se reconduit à la première série. Donc l'intervalle de convergence contient $]-1,1[$. Soit $S(x)$ la somme de la série. On sait qu'à l'intérieur de l'intervalle $S\in C^1$ et $S'(x)=\sum_{k\geq 1}x^{2k-1}$ (en dérivant chaque terme). Cette série coïncide avec celle du point 2. On a donc $S'(x)=x/(1-x^2)$. En utilisant également $S(0)=0$ on trouve
$$S(x)=\int_0^x\frac{t}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\log(1-x^2).$$
4. Cette fois-ci on trouve
$$\sum_{k\geq 0}x^{3k+1}-\sum_{j\geq 1}x^{3j-1}=x\sum_{k\geq 0}(x^3)^k-x^2\sum_{j\geq 0}(x^3)^j=\frac{x}{1-x^3}-\frac{x^2}{1-x^3}=\frac{x-x^2}{1-x^3}=\frac{x}{1+x+x^2}.$$
5. Le rayon R de convergence de chaque série peut être calculé par la formule
$$R^{-1}=\limsup_{n\to\infty}a_n^{1/n}$$
et donne toujours 1 pour chacune des séries ci-dessus. Il reste à vérifier la convergence en $x=1$ et $x=-1$. Dans tous les cas sauf 3., on n'a pas convergence de la série pour $|x|=1$ parce que le terme général a_nx^n ne tend pas vers 0. Dans le cas 3. la série à étudier, tant pour $x=1$ que pour $x=-1$, serait $\sum_{k\geq 1}1/(2k)$, qui diverge.

Exercice 3 (9 points)**.** Soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=1-\cos(\frac{x}{n})$.

1. Démontrer que la série
$$\sum_{n\geq 1}f_n(x)$$
converge pour tout $x\in\mathbb{R}$; on appellera $S(x)$ la fonction somme de cette série.
2. Démontrer qu'il ne s'agit pas d'une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en regardant $||f_n||_\infty$.
3. Démontrer qu'il s'agit d'une convergence normale sur tout intervalle borné $[-M,M]\subset\mathbb{R}$.
4. Prouver que S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
5. Donner l'expression de la dérivée $f_n'(x)$.
6. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1}f_n'(x)$ converge normalement sur $[-M,M]$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
7. Prouver $S\in C^1(\mathbb{R})$.
8. On considère maintenant les dérivées $f_n^{(k)}$ d'ordre supérieur, et en particulier on regarde la série
$$\sum_{n\geq 1}f_n^{(k)}(x)$$
pour $k\geq 2$. Pour tout $k\geq 2$, prouver la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}$.
9. En déduire $S\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Solution.

1. On a $f_n(x) \geq 0$ pour tout n et tout x, donc on peut utiliser, à x fixé, des équivalents. On a $x/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (toujours pour x fixé), donc on peut dire, pour $x \neq 0$
$$f_n(x) \approx \frac{|x|^2}{2n^2}$$
(pour $x = 0$ on ne peut pas parler d'équivalent, parce que la définition même d'équivalent demande à diviser les deux expressions qui seraient équivalentes, et on ne peut par diviser par 0) et la série du terme équivalent converge. Le cas $x = 0$ est vite réglé, on a $f_n(x) = 0$ pour tout n.
2. On a $||f_n||_\infty \geq f_n(n\pi) = 1 - \cos(\pi) = 2 > 0$, donc on n'a pas $||f_n||_\infty \to \infty$.
3. Si on fixe M, pour n grand on a $f_n(x) \leq f_n(M)$ (mais seulement pour n à partir d'un certain rang, qui dépend de M : pour le voir, étudier la monotonie de la fonction $f_n(x)$ sur $[0, M]$). Ensuite on utilise $\sum_{n\geq 0} f_n(M) < +\infty$, qui découle du point 1.
4. On sait que la convergence normale (en fait, uniforme est suffisante) d'une série de fonctions continues implique que la somme S est continue. Ceci marche bien sur $[-M, M]$, mais la continuité de S sur tout intervalle $[-M, M]$ implique la continuité sur $\mathbb{R}$.
5. On a $f_n'(x) = \frac{1}{n}\sin(x/n)$.
6. On a $|f_n'(x)| \leq |x|/n^2$, donc, sur $[-M, M]$, on peut majorer nos termes par M/n^2, dont la série converge. Par contre, sur $\mathbb{R}$ on a $||f_n||_\infty \geq f_n'(n) = \frac{1}{n}\sin(1)$ et cette série ne converge pas.
7. On sait que, pour une série de fonctions C^1, la convergence normale (en fait, uniforme est suffisante) de la série des dérivées, avec la convergence simple de la série des fonctions, donne la régularité C^1 de la somme S. À nouveau, ceci marche bien sur $[-M, M]$, mais $S \in C^1$ sur tout intervalle $[-M, M]$ implique $S \in C^1$ sur $\mathbb{R}$.
8. On a
$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^k} g_k(\frac{x}{n})$$
où $g_k(y)$ vaut soit $\pm\sin(y)$ soit $\pm\cos(y)$. De toute manière on a
$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{n^k}$$
et cette série converge.
9. La convergence uniforme de la série $S_k(x) := \sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x)$, avec la convergence simple de $S_{k-1}(x) := \sum_{n\geq 1} f_n^{(k-1)}(x)$, permet de déduire $S_{k-1} \in C^1$ et $S_{k-1}' = S_k$. Ensuite, par récurrence, on peut montrer $S^{(k)} = S_k$ et $S \in C^k$. Ceci étant vrai pour tout k, on obient $S \in C^\infty$.