Math 203 – Analyse et convergence II

–

Examen partiel, 11 mars 2015

Durée : 2h ; documents et calculettes interdits.
Chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.
Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.
Il est toujours possible d'admettre la réponse à une question précédente pour traiter les suivantes.

Exercice 1 (8 points)**.** Considérer la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par

$$f_n(x) = n\frac{x(1-nx)(1+nx)}{1+n^4x^4}.$$

1. Trouver la limite simple de cette suite de fonctions.
2. Dire s'il s'agit d'une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Prouver que, pour $a > 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
4. *(Plus difficile) :* Considérer le cas général où f_n est définie par $f_n(x) = g(nx)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, et telle que les limites $\lim_{x\to+\infty} g(x) := \ell^+$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) := \ell^-$ existent et sont finies.
   (a) Prouver que la suite $(f_n)_n$ converge simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Prouver que la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ si on n'a pas $\ell^+ = \ell^- = g(0)$.
   (c) Prouver que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est constante.

Exercice 2 (6 points)**.** Considérons les séries entières suivantes

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}, \quad \sum_{n\geq 0} nx^n, \quad \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}, \quad \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n, \quad \sum_{n\geq 0} n^2x^n.$$

Prouver que ces séries convergent toutes pour $x \in]-1, 1[$ et calculer leur somme.

Exercice 3 (11 points)**.** Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (-1)^n \sin(\frac{x}{n})$.

1. Démontrer que la série
$$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$$
converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; on appelera $S(x)$ la fonction somme de cette série.
2. Démontrer qu'il ne s'agit pas d'une convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$,
3. Démontrer qu'il ne s'agit pas d'une convergence normale sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
4. *(Plus difficile) :* prouver qu'en revanche il y a convergence uniforme sur $[0, a]$, quel que soit $a > 0$.
5. Donner l'expression de la dérivée $f_n'(x)$.
6. Vérifier que la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n'(0)$ converge.
7. Prouver que l'on a $|f_n'(x) - f_n'(0)| \leq \frac{|x|}{n^2}$.
8. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0, a] \subset \mathbb{R}_+$. S'agit-il d'une convergence normale sur ces mêmes intervalles ?
9. Prouver $S \in C^1(\mathbb{R}_+)$.
10. On considère maintenant les dérivées $f_n^{(k)}$ d'ordre supérieur, et en particulier on regarde la série
$$\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x)$$
pour $k \geq 2$. Pour tout $k \geq 2$, prouver la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}_+$.
11. En déduire $S \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.