# Calcul Différentiel et Analyse Complexe
## –
# Examen partiel, 6 mai 2020

**Durée : 1h30 ; calculettes, notes personnelles et textes sont autorisés (de toute manière on ne pourrait rien vérifier) ; seulement, ne vous faites pas aider par d'autres humains.**

*Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté. Le barème dépassant largement 20, vous êtes encouragés à ne pas résoudre tous les exercices mais à vous concentrer sur deux ou trois d'entre eux.*

**Exercice 1** (7 points)**.** Considérer la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!}.$$

a) Prouver que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

b) Soit $f(z)$ la somme de la série entière pour $z \in \mathbb{C}$. Vérifier que la fonction $f$, restreinte à $\mathbb{R}$, est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour tout $x \geq 0$.

c) Vérifier que l'on a

$$f''(z) = -\frac{f(z) + 2f'(z)}{4z} \qquad \text{pour tout } z \neq 0.$$

**Corrigé :**

Pour une série entière dont les coefficients valent $(a_n)_n$, le rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$ est caractérisé par $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. Ici cette limsup est une limite et vaut 0, comme conséquence par exemple de l'inégalité $(2n)! \geq M^n$ qui est vraie, pour $n$ suffisamment grand, pour $M$ arbitraire. Donc $R = \infty$.

La série entière du cosinus vaut $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Pour $x \geq 0$, on a donc égalité entre la sérife $f$ calculée en $x$ et celle du cosinus calculée en $\sqrt{x}$. La fonction $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc $C^\infty$, donc elle est aussi $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation différentielle peut être vérifiée en dérivant terme à terme la série. On a en effet

$$zf''(z) = z\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n(n-1)z^{n-2}}{(2n)!} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n(n-1)z^{n-1}}{(2n)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)nz^n}{(2n+2)!}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} f(z) + 2f'(z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n n z^{n-1}}{(2n)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!} + \sum_{n\geq 0} 2\frac{(-1)^{n+1}(n+1)z^n}{(2n+2)!} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n+2)!}((2n+2)(2n+1) - 2(n+1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n+2)!}(2n+2)2n, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a bien $zf''(z) = -4(f(z) + 2f'(z))$. La même égalité aurait même puêtre obtenue en dérivant deux fois la fonction $x \mapsto f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour $x > 0$, ce qui donne

$$f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{\cos(\sqrt{x})}{4x} + \frac{\sin(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = -\frac{f(x) + 2f'(x)}{4x}.$$

Cette égalité entre fonctions holomorphes étant vraie sur la demi-droite réelle positive, par le principe des zéros isolés elle est finalement vraie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, qui est connexe.

**Exercice 2** (7 points)**.** Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(x+iy) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}, \qquad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

Prouver que $f(z)^2 = z$, et que $f$ est holomorphe sur $\Omega$ mais n'est pas la restriction à $\Omega$ d'une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$.

**Corrigé :**
On rappelle que le carré $a+ib$ est donné par $(a^2-b^2)+2iab$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x+iy)^2 = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} - \frac{y^2}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})} + 2i\frac{y}{2} &= \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2-y^2}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})} + iy \\ &= \frac{x^2+x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}-y^2}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})} + iy = \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})} + iy = x+iy \end{aligned}$$

On a bien donc $f(z)^2 = z$. Pour vérifier que $f$ est holomorphe il y a maintenant plusieurs possibilités.

— On peut calculer les dérivées partielles de $f$ et vérifier les conditions de Cauchy-Riemann, mais cela est un peu long.

— On peut calculer la dérivée complexe en utilisant

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(z+h)^2-f(z)^2}{h(f(z+h)+f(z))} = \frac{z+h-z}{h(f(z+h)+f(z))} = \frac{1}{f(z+h)+f(z)},$$

ce qui implique

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2f(z)}$$

grâce à la continuité de $f$ (qui est évidente de par son expression, sur $x > 0$). eci montre que la dérivée complexe existe, et donc $f$ est holomorphe.

— On peut vérifier que $f(z)^2 = z$, avec $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(f(z)) > 0$, implique $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$, où log est la détermination hoomorphe du logarithme sur $\Omega$ avec argument dans $]-\pi+2, \pi/2[$. Ceci implique que $f$ est holomorphe par composition de fonctions hoomorphes.

Enfin, on ne peut pas étendre $f$ à une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ parce que, sinon, on pourrait l'écrire comme $f(z) = z^m h(z)$ pour $m \geq 0$ et $h(0) \neq 0$. Or, en prenant le carré, on trouve $z = z^{2m}h^2(z)$. Ceci implique $m > 0$, sinon on aurait $0 = h(0)^2$, et donc on a $z = o(z)$, ce qui est une contradiction.

**Exercice 3** (7 points)**.** On désigne par $\gamma$ le cercle de centre 2 et rayon 3 parcouru dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z+2)(z-i)^3}\,dz$.

**Corrigé :**
Tout d'abord on peut simplifier un facteur $z-i$ entre numérateur et dénominateur, et on se retrouve à regarder la fonction

$$f(z) = \frac{z+i}{z(z+2)(z-i)^2}.$$

L'intégrale peut se calculer par le théorème des résidus. La courbe $\gamma$ est simple et parcourue dans le sens direct, donc il suffit de trouver les pôles de la fonction $f$ à l'intérieur du cercle, et leur indice vaudra 1. Les pôles de cette fonction se situent en $0, i$ et $-2$. Cependant, $-2$ est à l'extérieur du cercle parce que sa distance au centre vaut 4. Le point 0 est un pôle simple. Son résidu peut se calculer par la formule qui dit que le résidu de $f = g/h$ en $a$ vaut $g(a)/h'(a)$ si $a$ est un pôle simple. Ici $g(z) = z+i$ et

$h(z) = z(z+2)(z-i)^2$, d'où $h'(z) = (z+2)(z-i)^2 + z(z-i)^2 + 2z(z+2)(z-i)$, donc $h'(0) = 2(-i)^2 = -2$ et $g(0) = i$. On a donc $\mathrm{Res}(f; 0) = -i/2$.

C'est plus compliqué pour le pôle $i$, qui est double. Il faut utiliser la formule donnée par

$$\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right]_{z=i}.$$

Il faut donc dériver $\frac{z+i}{z(z+2)}$, ce qui donne $\frac{z(z+2)-(z+i)(2z+2)}{z^2(z+2)^2} = \frac{-z^2-2iz-2i}{z^2(z+2)^2}$. Si on calcule cela en $i$ on obtient donc $\mathrm{Res}(f; i) = \frac{2i-3}{(2+i)^2}$.

On obtient finalement

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\Big(-\frac{i}{2} + \frac{2i-3}{(2+i)^2}\Big).$$

**Exercice 4** (9 points)**.** On se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et on cherche à déterminer s'il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et bornée mais non constante.

a) Une telle fonction existe-t-elle dans le cas $\Omega = \mathbb{C}$ ?

b) Prouver qu'une telle fonction existe dès qu'une boule $B(z_0, R)$ avec $R > 0$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

c) Prouver qu'une telle fonction existe dès qu'une demi-droite $\{z_0 + th \,:\, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ (pour $z_0, h \in C$ deux complexes fixés, avec $h \neq 0$) est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

d) Une telle fonction existe-t-elle dans le cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\ z_N\}$, c'est-à-dire le plan complexe tout entier privé d'un nombre fini de points ?

e) Quid du cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\} \cup \{0\})$, c'est-à-dire le plan complexe tout entier privé d'une suite ainsi que de sa limite ?

**Corrigé :**

a) Toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante (Theorème de Liouville), donc la réponse à la première question est non.

b) Si $B(z_0, R)$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$ alors $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ est une fonction holomorphe non constante sur $\Omega$, qui est bornée parce que $|f(z)| \leq 1/R$.

c) Le domaine $\mathbb{C} \setminus D$, où $D = \{z_0 + th \,:\, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ est un ouvert simplement connexe qui ne coïncide pas avec $\mathbb{C}$. Le théorème de la représentation conforme de Riemann nous dit alors qu'il existe un biholomorphisme entre celui-ci et la boule unité. Ce bihoomorphisme, restreint à $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus D$, est une fonction homomorphe injective (donc non-constante) et bornée. Il est également possible de construire à la main une telle fonction holomorphe. Si par exemple $D = \mathbb{R}_-$, on peut prendre $f(z) = \frac{1}{h(z)-4i}$ où $h$ est une détermination holomorphe du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, en prenant l'argument dans $]-\pi, \pi[$ (donc $\mathrm{Im}(h(z)) \in ]-\pi, \pi[$, d'où le choix de soustraire $4i$ pour que le dénominateur ne s'annule pas et soit borné loin de 0).

d) Une fonction holomorphe définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\ z_N\}$ admet en $z_1, z_2, \dots\ z_N$ es singularités isolées. Or, la fonction étant bornée, ces singulaités sont des singularités artificielles. Cela signifie qu'on peut étendre la fonction par continuité à tout $\mathbb{C}$ et qu'elle resterait bornée et holomorphe. On aurait donc une fonction bornée et holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc constante. La réponse est donc non.

e) Ce cas est légèrement plus compliqué parce que les singularités ne seraient pas toutes isolées. Mais les points $1/n$ seraient bien des singularités isolées (seul 0 pourrait ne pas l'être). Le même argument de tout à l'heure prouve qu'on peut étendre la fonction par continuité à tout $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et qu'elle resterait bornée et holomorphe. On aurait maintenant 0 qui serait une singularité isolée de la nouvelle fonction, obtenue par extenstion, et à nouveau il s'agirait d'une singularité artificielle. Finalement, on aurait bien une fonction bornée et holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc constante. La réponse est donc à nouveau non.