Calcul Différentiel et Analyse Complexe

—

Examen partiel, 6 mai 2020

Durée : 1h30 ; calculettes, notes personnelles et textes sont autorisés (de toute manière on ne pourrait rien vérifier) ; seulement, ne vous faites pas aider par d'autres humains.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté. Le barème dépassant largement 20, vous êtes encouragés à ne pas résoudre tous les exercices mais à vous concentrer sur deux ou trois d'entre eux.

Exercice 1 (7 points)**.** Considérer la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!}.$$

a) Prouver que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

b) Soit $f(z)$ la somme de la série entière pour $z \in \mathbb{C}$. Vérifier que la fonction f, restreinte à $\mathbb{R}$, est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour tout $x \geq 0$.

c) Vérifier que l'on a

$$f''(z) = -\frac{f(z) + 2f'(z)}{4z} \qquad \text{pour tout } z \neq 0.$$

Exercice 2 (7 points)**.** Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(x+iy) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}, \qquad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

Prouver que $f(z)^2 = z$, et que f est holomorphe sur Ω mais n'est pas la restriction à Ω d'une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3 (7 points)**.** On désigne par γ le cercle de centre 2 et rayon 3 parcouru dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z+2)(z-i)^3}\,dz$.

Exercice 4 (9 points)**.** On se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et on cherche à déterminer s'il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et bornée mais non constante.

a) Une telle fonction existe-t-elle dans le cas $\Omega = \mathbb{C}$?

b) Prouver qu'une telle fonction existe dès qu'une boule $B(z_0, R)$ avec $R > 0$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

c) Prouver qu'une telle fonction existe dès qu'une demi-droite $\{z_0 + th \,:\, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ (pour $z_0, h \in C$ deux complexes fixés, avec $h \neq 0$) est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

d) Une telle fonction existe-t-elle dans le cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots\ z_N\}$, c'est-à-dire le plan complexe tout entier privé d'un nombre fini de points ?

e) Quid du cas $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\})$, c'est-à-dire le plan complexe tout entier privé d'une suite ainsi que de sa limite ?