Calcul Différentiel et Analyse Complexe

—

Examen partiel, 20 mars 2019

Durée : 2h ; calculettes interdites ; seule une feuille A4 (recto-verso) de notes personnelles est autorisée ; chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté. Le barème dépasse largement 20, il n'est pas obligatoire de résoudre tous les exercices. Les questions avec une étoile portent plus sur l'analyse complexe, faite en CM mais pas en TD, valent 2 points chacune (déjà comptabilisés dans la valeur de chaque exercice) et il est peut-être judicieux de les traiter dans un deuxième temps. Sans ces questions, le barème est donc de 24 points.

Exercice 1 (10 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x, y) = (e^{2x} \cos y, e^x \sin y).$$

1. Justifier que f est une fonction C^∞ et écrire sa matrice Jacobienne.
2. Prouver que f est localement un difféomorphisme autour de chaque point de $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver toutes les images réciproques des points $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$. La fonction f est-elle injective ? surjective ? globalement un difféomorphisme ?
4. * On identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. La fonction f est-elle holomorphe ?
5. * Trouver tous les points de $\mathbb{C}$ où f admet une dérivée complexe.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Prouver que f est différentiable en tout point mais pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les dérivées partielles de f sont-elles bornées sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Exercice 3 (9 points)**.** Considérer la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(\theta) := (\cos(\theta), \sin(3\theta)).$$

1. Prouver que cette courbe est régulière.
2. Est-elle parametrée par longueur d'arc ?
3. En distinguant le cas $|\theta - k\pi| \leq \pi/12$ et $|\theta - k\pi| > \pi/12$, prouver que l'on a $\|\gamma'(\theta)\|^2 \geq \min\{\sin^2(\pi/12), 9/2\}$. En déduire $\|\gamma'(\theta)\| \geq 0.2$.
4. Donner une expression de la courbure de γ comme fonction de θ à l'aide de fonctions élementaires, et justifier qu'elle ne dépasse jamais 1500.
5. Soit $L(\gamma)$ la longueur de cette courbe. Prouver que l'on a
$$2\sqrt{5} + 2\sqrt{11 - 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{3}} \leq L(\gamma) \leq 2\pi\sqrt{10}.$$
6. * On considère maintenant cette courbe comme un chemin dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Trouver l'indice par rapport à cette courbe des points $z_0 = 0, -3/4, 1 + i$.

Exercice 4 (6 points)**.** Considérer la courbe plane

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^4 - y^3 + 5x^2 y + 1 = 0\}.$$

1. Montrer qu'il existe une paramétrisation locale de C au voisinage du point $(0, 1)$ sous la forme d'un graphe $y = \varphi(x)$.
2. Trouver le developpement de cette fonction φ à l'ordre 2 au voisinage du même point.
3. Trouver la courbure de la courbe C au point $(0, 1)$.