Examen Partiel du 16 mars 2011

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.

Exercice 1.— Enoncer et démontrer le théorème du cours concernant la continuité de la limite d'une suite de fonction.

Exercice 2.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^x}\cdot$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $f_n'(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $x > 0$ fixé. Déterminer la limite de $n^2 f_n(x)$ quand $n \to +\infty$. En déduire que la série de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

4. Donner $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$. Montrer que la série de terme général f_n ne peut pas être normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

5. Montrer que la fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}\cdot$$

1. Montrer que la série de terme général f_n converge simplement si et seulement si $x \geq 0$. On notera $S(x)$ sa somme.

2. Etudier la convergence normale et uniforme de cette série de fonctions sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5. Montrer que la série de terme général $f_n''(x)$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, +\infty[$.

6. Montrer néanmoins que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

7. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$S''(x) + S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot$$