Corrigé de l'Examen Partiel du 16 mars 2011

Exercice 2.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Pour $x = k\pi$, a ec $k \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Pour $x \neq k\pi$, $|\cos x| < 1$ donc $n(\cos x)^n \sin x \to 0$ quand $n \to +\infty$. La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

2. On a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx = 0$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} n(\cos x)^n \sin x dx = \int_0^1 ns^n ds = \frac{n}{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx \neq \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$, ce qui montre que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3.— 1. On note tout d'abord que $f_n(x) = xe^{-x(n+\ln n)}$. On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. On calcule $f_n'(x) = e^{-x(n+\ln n)}(1-(n+\ln n)x)$. La fonction f_n est donc croissante sur $[0, 1/(n+\ln n)]$ et décroissante sur $[1/(n+\ln n), +\infty]$. La fonction f_n admet un maximum en $x_n = 1/(n+\ln n)$, et la valeur de ce maximum est $d_n = f_n(x_n) = \dfrac{1}{e(n+\ln n)}\cdot$ Puisque $d_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

3. Soit $x > 0$ fixé. On a $n^2 f_n(x) = n^2 xe^{-x(n+\ln n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$ par croissance comparée. Donc la suite $(n^2 f_n(x))$ est bornée: il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{C}{n^2}\cdot$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général $f_n(x)$ converge aussi. Pour $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$. Au total, la série de terme général $f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

4. On a calculé à la question 2 $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = d_n = \frac{1}{e(n+\ln n)}$. Supposons que la suite (a_n) vérifie $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq a_n$. On aurait nécessairement

$$a_n \geq d_n \geq \frac{1}{2en},$$

donc la série de terme général a_n serait divergente. La série de terme général f_n ne peut pas être normalement convergente.

5. On va montrer que la série de terme général f_n est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, ce qui donnera le résultat. Soit donc $a > 0$. Puisque $x_n =$

$1/(n+\ln n)$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $x_n < a$. La fonction f_n étant alors décroissante sur $[a, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = ae^{-a(n+\ln n)} \leq ae^{-an}.$$

Or la série de terme général ae^{-an} est convergente, ce qui prouve la convergence normale de la série de terme général f_n sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Exercice 4.— 1. Pour $x < 0$, $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \to +\infty$ donc la série de terme général $f_n(x)$ diverge. Pour $x \geq 0$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \to +\infty$, et la série $\sum f_n(x)$ converge par comparaison avec la série $\sum \dfrac{1}{1+n^2}$.

2. On vient de voir que $|f_n(x)| \leq a_n$ avec $a_n = \frac{1}{1+n^2}$. La série $\sum f_n(x)$ converge donc normalement et uniformément sur $[0, +\infty[$.

3. Les fonctions f_n sont continues sur $[0, +\infty[$, et la série converge uniformément sur cet intervalle. Donc la fonction somme est continue.

4. Chacune des fonctions f_n est $\mathcal{C}^\infty$, et, pour $n \geq 1$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k}\dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$. Soit $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$ on a

$$|f_n'(x)| \leq e^{-na}\frac{n}{n+1} \leq (e^{-a})^n.$$

Puisque $0 < e^{-a} < 1$, la série de terme général f_n' est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. On en déduit que $S(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

On peut faire mieux. Pour $x \geq 0$, la serie de terme général $u_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}e^{-nx}$ converge, d'après le critère spécial pour les série alternées. On note alors T sa fonction somme. Puisque $\sum u_n'(x)$ est une série alternée, on a

$$|T(x) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n'(x)| \leq |u_N'(x)| \leq \frac{N}{N^2+1},$$

ce qui montre que la série $\sum u_n'(x)$ converge uniformément vers T sur $[0, +\infty[$. La fonction S est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et $S'(x) = T(x)$.

5. On a $f_n''(x) = (-1)^n\dfrac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}$, et $f_n''(0) = (-1)^n\dfrac{n^2}{1+n^2} \not\to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} f_n''(0)$ diverge, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n''(x)$ ne converge pas uniformément (même pas simplement) sur $[0, +\infty[$.

6. Comme à la question 4), pour $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$ on a

$$|f_n'(x)| \leq e^{-na}\frac{n^2}{n^2+1} \leq (e^{-a})^n.$$

On en déduit que $S(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, et que, pour $x \in]0, +\infty[$, $S''(x) = \sum (-1)^n \dfrac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}$.

7. Pour $x > 0$, on a donc

$$S''(x) + S(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n^2e^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n e^{-nx} = \sum_{n\geq 0}(-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$