
Examen Partiel du 14 mars 2012

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.

Exercice 1.— Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions (f_n) lorsque f_n est définie pour $n \geq 1$ par

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ 2. $f_n(x) = xe^{-nx}$.

Exercice 2.— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. Calculer f_n' et montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On notera S sa somme.

4. La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?

5. Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

6. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2})$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note U sa somme.

b) Montrer que U est dérivable. Que pouvez-vous dire de $U'(x)$?

Exercice 3.— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Rappeler le critère spécial de convergence pour les séries numériques alternées $\sum_{n\geq 1} u_n$. Que peut-on dire du reste $R_n = \sum_{p\geq n+1} u_p$ d'une telle série lorsqu'elle converge?

2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$. On note S sa somme.

3. Démontrer que la fonction S est continue sur $]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$.

4. Montrer que la fonction S est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et donner $S'(x)$. Quel est le sens de variation de la fonction S?

5. Déterminer la limite de $S(x)$ quand $x \to +\infty$, et la limite de $S(x)$ quand $x \to -1^+$.