Université de Paris Sud 11 **L2 – Math203**
Mathématiques **2ème semestre 11/12**

Corrigé du Partiel du 14 mars 2012

Exercice 1.— 1. Convergence simple: pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. Convergence uniforme: on peut remarquer que $f_n(n) = \frac{1}{2}\cdot$ Donc $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$, et la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2. Convergence simple: Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) = xe^{-nx} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. Convergence uniforme: On a $f_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx)$, et on voit que $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1/ne$. Donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Exercice 2.— 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{2x}{n^2\pi^2}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2x}{n^2\pi^2} = 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle

2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n'(x) = \dfrac{2n^2\pi^2 - 2x^2}{(x^2 + n^2\pi^2)^2}$. On peut alors voir que f_n atteint son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en $x = n\pi$. Donc $\|f_n\|_\infty = f_n(n\pi) = \dfrac{1}{n\pi} \to 0$ quand $n \to +\infty$, et la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. On a vu que $|f_n(x)| \leq \dfrac{2x}{n^2\pi^2}$. Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{2x}{n^2\pi^2} = \dfrac{2x}{\pi^2} \sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

4. Supposons que la série $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Il existe alors une suite (a_n) de réels telle que $\sum a_n$ converge et $\|f_n\|_\infty \leq a_n$. Or $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n\pi}$, et la série $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{n\pi}$ diverge, ce qui est absurde. Donc $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$

5. Il est tout d'abord clair que les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit $a > 0$. Pour $x \in [0, a]$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{2a}{n^2\pi^2},$$

et la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{2a}{n^2\pi^2}$ converge. Ainsi la série converge normalement sur $[0, a]$, donc uniformément sur $[0, a]$. Cela entraine que la fonction S est continue sur $[0, a]$. Puisque ceci est vrai pour tout $a > 0$, la fonction S est continue en chaque point de $\mathbb{R}^+$.

6. a) On sait que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Donc $u_n \leq \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$, et la série $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$ converge. Donc la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

b) On remarque que u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que $u_n'(x) = f_n(x)$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $a > 0$. Ainsi la fonction U est dérivable sur tout intervalle $[0,a]$, i.e. en chaque point de $\mathbb{R}^+$, et $U'(x) = S(x)$.

Exercice 3.— 1. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique alternée, avec $u_n = (-1)^n a_n$, où (a_n) est une suite de réels positifs. Si la suite (a_n) est décroissante, et a pour limite 0, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. De plus, notant $R_n = \sum_{p\geq n+1} u_p$, on a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

2. Soit $x \in]-1,+\infty[$ fixé. La série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série alternée, puisque $f_n(x) = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{x+n} > 0$. La suite (a_n) décroît et tend vers 0, donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

3. Soit $R_n(x) = \sum_{p\geq n+1} f_n(x)$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{x+n+1} \leq \dfrac{1}{n} \to 0$, donc la suite (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle, et la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément vers S sur $]-1,+\infty[$. Puisque les fonctions f_n sont continues sur $]-1,+\infty[$, on peut en déduire que la fonction S est continue sur $]-1,+\infty[$.

4. Les fonctions f_n sont dérivables sur $]-1,+\infty[$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ est une série alternée, et notant Q_n son n-ième reste on a, pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$|Q_n(x)| \leq |f_{n+1}'(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Donc la série des dérivées converge uniformément sur $]-1,+\infty[$, et la fonction S est dérivable, avec

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

Enfin on a $S'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + Q_1(x)$, avec $|Q_1(x)| \leq \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Donc $S'(x) \geq \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, et S est croissante.

5. Comme ci dessus on a $S(x) = -\dfrac{1}{x+1} + R_1(x)$ avec $|R_1(x)| \leq \dfrac{1}{x+2}$, donc $|S(x)| \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

On vient de voir que $S(x) \leq -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \leq -\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$, donc $S(x) \to -\infty$ quand $x \to -1^+$.