Université de Paris Sud 11 **L2 – Math203**
Mathématiques **2ème semestre 13/14**

Examen Partiel du 12 mars 2014

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.

Exercice 1.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\pi/2]$ par $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$..

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi/2]$? On citera avec précision le résultat du cours utilisé pour justifier sa réponse.

Exercice 2.— Soit α un réel fixé, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}\cdot$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) en distinguant les cas $\alpha > 2$, $\alpha = 2$ et $\alpha < 2$. Pour chaque cas, on donnera l'expression de la fonction limite et le domaine où la convergence a lieu.

2. Dans le cas $\alpha = 2$, la suite (f_n) peut-elle converger uniformément sur $\mathbb{R}$?

3. Dans le cas $\alpha < 2$, étudier les variations de la fonction f_n. Pour quelles valeurs de α la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle?

4. A l'aide de la question précédente, déterminer pour quelles valeurs de $\alpha < 2$ la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement.

Exercice 3.— Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}\cdot$

1. Etudier la converge simple de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. En majorant le reste $R_p(x) = \displaystyle\sum_{n\geq p+1} f_n(x)$, montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Quelle propriété pouvez-vous en déduire pour sa fonction somme S?

3. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n'$. On note T sa somme. Donner une expression simple de $T(x)$ pour $x > 0$.

4. Montrer que la série $\sum f_n'$ converge uniformément vers T sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

5. Montrer que, pour tout $x > 0$, $|S(x)| \leq e^{-x}$. En déduire la limite de $S(x)$ quand $x \to +\infty$. Montrer alors que, pour tout $x \geq 0$,

$$S(x) = -\int_x^{+\infty} T(t)dt.$$

6. Calculer $S(x)$. En déduire les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n}\cdot$