Université de Paris Sud 11 — **L2 – Math203**
Mathématiques — **2ème semestre 13/14**

Corrigé du Partiel du 12 mars 2014

Exercice 1.— 1. Soit $x \in]0, \pi/2]$ fixé. On a $\cos x \in [0, 1[$, donc $n \cos^n x \to 0$ quand $n \to +\infty$, et $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $x = 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$.

2. C'est un calcul direct

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx = n\Big[-\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}\cdot$$

3. Puisque $I_n \to 1$ quand $n \to +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx \neq \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, \pi/2]$.

Exercice 2.— 1. Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Pour $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-2}}{x}\cdot$$

Donc pour $\alpha > 2$, la suite $(f_n(x))$ diverge, pour $\alpha = 2$, $(f_n(x)) \to 1/x$, et pour $\alpha < 2$, $(f_n(x)) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $\alpha > 2$ la suite ne converge simplement qu'en $x = 0$, pour $\alpha < 2$ la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, et pour $\alpha = 2$, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$.

2. Pour $\alpha = 2$, on observe que la fonction limite f n'est pas continue en 0. Comme les fonctions f_n le sont, la suite (f_n) ne peut pas converger uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. On suppose $\alpha < 2$. On a

$$f_n'(x) = \frac{n^\alpha(1 + n^2x^2) - n^\alpha x.2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n^\alpha(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2},$$

ce qui donne le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-1/n$		$1/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	0				$n^{\alpha-1}$		
f_n		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-n^{\alpha-1}$				0

Ainsi $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = n^{\alpha-1}$, et la suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle si et seulement si $\alpha < 1$.

4. Supposons que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Il existe une suite (a_n) de nombres positifs telle que $\sum a_n$ converge, et $a_n \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Donc $a_n \geq n^{\alpha-1}$, ce qui entraine que, nécessairement $\alpha - 1 < -1$, i.e. $\alpha < 0$. Réciproquement, la série converge bien normalement pour $\alpha < 0$.

Exercice 3.— Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}\cdot$

1. Pour $x < 0$, $\frac{e^{-nx}}{n} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, donc la série $\sum f_n(x)$ diverge. Pour $x = 0$, on est en présence de la série harmonique alternée, qui converge. Pour $x > 0$, $|f_n(x)| \leq (e^{-x})^n$, et la série $\sum (e^{-x})^n$ est une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$, donc convergente. En conclusion, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et diverge sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. Pour $x \geq 0$, la série $\sum f_n(x)$ est une série alternée, et l'on sait que le reste d'une telle série vérifie

$$|R_p(x)| \leq |f_{p+1}(x)|.$$

Ici, donc, on a $|R_p(x)| \leq \dfrac{e^{-(p+1)x}}{p+1}$, donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |R_p(x)| \leq \frac{1}{p+1} \to 0 \text{ quand } p \to +\infty,$$

ce qui montre que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Puisque les fonctions f_n sont continues, et que la série converge uniformément, sa fonction somme est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. On a d'abord $f_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx} = -(-e^{-x})^n$. Pour $x = 0$, on a $f_n'(x) = (-1)^{n+1}$ donc la série diverge, et pour $x > 0$, la série $\sum f_n'(x)$ est (l'opposé d') une série géométrique de raison $-e^{-x} \in]-1, 0[$, donc elle converge. La série $\displaystyle\sum f_n'$ converge donc simplement sur $]0, +\infty[$, et diverge sur $\mathbb{R}_-$. De plus, pour $x > 0$, on a

$$T(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x) = -\sum_{n\geq 1} (-e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\cdot$$

4. Pour $x > a > 0$, on a $|f_n'(x)| \leq e^{-an}$. Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} e^{-an}$ converge, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

5. On écrit $S(x) = -e^{-x} + R_1(x)$, où $R_1(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ est le 1er reste d'une série alternée. On sait que $S(x)$ est négative, et que $R_1(x)$ est du signe de $f_2(x)$, donc positif. On en déduit que

$$|S(x)| = -S(x) = e^{-x} - R_1(x) \leq e^{-x}.$$

En particulier $S(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Puisque la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge uniformément vers T sur tout compact $[a, b] \subset]0, +\infty[$, la fonction S est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $S'(t) = T(t)$ pour tout $t > 0$.

Du coup, pour tout $A > 0$ et tout $x > 0$, on a,

$$S(x) - S(A) = \int_A^x T(t)dt,$$

et, en faisant tendre $A \to +\infty$, on obtient bien

$$S(x) = -\int_x^{+\infty} T(t)dt.$$

6. On a finalement $S(x) = -[-\ln(1 + e^{-t})]_x^{+\infty} = -\ln(1 + e^{-x})$, d'où $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = S(0) = -\ln(2)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n} = S(1) = -\ln(1 + 1/e)$.