Calcul Différentiel et Analyse Complexe
Épreuve de 2e chance, 24 juin 2020

Durée : 2h ; calculettes, notes personnelles et textes sont autorisés (de toute manière on ne pourrait rien vérifier) ; seulement, ne vous faites pas aider par d'autres humains.

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (z(x^2 - y^2), 2xyz, z).$$

1. Prouver que f est C^∞ et écrire sa matrice jacobienne en tout point.
2. Trouver tous les points de l'espace au voisinage desquels f est un difféomorphisme local.
3. La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}^3$? surjective à valeurs dans $\mathbb{R}^3$?
4. Soit $\Pi_a \subset \mathbb{R}^3$ l'hyperplan défini par $\Pi_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = a\}$. Vérifier que f envoie Π_a sur Π_a pour tout $a \in \mathbb{R}$. En identifiant chaque Π_a à $\mathbb{C}$ (par l'application $(x, y, a) \mapsto x + iy$), dire si la restriction de la fonction f à chaque Π_a est holomorphe. Pour quelles valeurs de a cette restriction est-elle surjective ? et injective ?

Exercice 2 (8 points)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction holomorphe définie par

$$f(z) := \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et Ω l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $\Omega = \{z \in C \,:\, |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$.

1. Prouver que f est la seule extension holomorphe de la fonction réelle $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x)$.
2. Prouver que f est la seule fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f(z)) = \sin(\mathrm{Re}(z))\frac{e^{\mathrm{Im}(z)} + e^{-\mathrm{Im}(z)}}{2}$ et $f(0) = 0$
3. Prouver que f est localement un biholomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.
4. Prouver que f est injective sur Ω et qu'elle est un biholomorphisme entre Ω et $f(\Omega)$.
5. Prouver que l'on a $f(\Omega) \neq \mathbb{C}$.
6. Trouver l'image $f(\Omega)$.

Exercice 3 (6 points)**.** Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le lacet donné par $\gamma(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(2\theta)$. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{1}{4z^2 - 1} dz.$$

Exercice 4 (7 points)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Rappeler pourquoi la condition "$|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$" implique que f est constante.
2. S'il existe deux constantes $a, m > 0$ telles que $|f(z)| \leq a(1 + |z|)^m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, que peut-on dire sur la fonction f ?
3. Prouver que si l'on a $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors f est constante.
4. Prouver que si l'on a deux constantes $a, m > 0$ telles que $|f(z)| \geq \frac{1}{a(1+|z|)^m}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors f est constante.