ENSAE
Examen d'Optimisation Dynamique
Session de Rattrapage

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé

Ce sujet se compose d'une seule page

Question de Cours 1 (4 points)**.** Donner un énoncé précis d'existence pour les problèmes de programmation dynamique en temps discret et horizon infini avec invariance temporelle, exactement comme l'on a vu en classe.

Exercice 2 (7 points)**.** Considérer le problème de contrôle suivant

$$\max\left\{\int_0^T -\frac{1}{2}u(t)^2\,dt\;+\;x(T)\quad:\quad x'(t)=x(t)-x(t)u(t),\quad x(0)=x_0\leq 0\right\}.$$

a) Ecrire l'Hamiltonien du système, le système Hamiltonien résolu par (x,p), et l'équation d'H-J-B résolue par la fonction valeur (avec les conditions initiales et/ou finales appropriées).

b) Démontrer que, si (x^*,p^*) est une solution du système Hamiltonien, alors la quantité $x^*(t)p^*(t)$ reste constante au cours du temps.

c) Expliquer pourquoi on peut s'attendre à ce que le contrôle optimal u^* soit constant.

d) Ré-écrire ce problème en se restreignant aux contrôles constants (c'est-à-dire considérer $u(t)=U$ et écrire un problème du type $\max_U F(U)$). Dire si ce problème admet une solution, si elle est unique et la caractériser.

e) Trouver explicitement la solution pour $x_0=0$

f) Expliquer ce qui changerait si on avait $x_0>0$

Exercice 3 (6 points)**.** Résoudre

$$\min\left\{\int_0^1\Big(u'(t)^2+u(t)^2+2tu(t)\Big)\,dt\quad:\quad u\in C^1([0,1]),\;u(0)=0\right\}.$$

Dès qu'un candidat à la minimisation u^* sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur.

Exercice 4 (7 points)**.** Soit $x_0\geq 0$ fixé. Résoudre soigneusement le problème d'optimisation suivant (en déterminant la politique optimale si elle existe, la valeur du problème et les fonctions valeur si nécessaire et en justifiant tout ce qu'il est opportun de justifier)

$$\sup\Big\{f(x_0,x_1)+g(x_1,x_2)+h(x_2,x_3)+i(x_3,x_4),\;x_{i+1}\in\Gamma_i(x_i),\;i=0,1,2,3\Big\}$$

où les paiements f,g,h et i et les correspondances $\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2$ et Γ_3 sont définis par

$$f(x_0,x_1)=-x_0x_1^2-x_0^2x_1\quad g(x_1,x_2)=x_1\sqrt{x_2}-x_2^3-\tfrac{1}{2}x_2,$$

$$h(x_2,x_3)=\tfrac{3}{4}x_2^2x_3,\qquad\qquad i(x_3,x_4)=x_3^2x_4-x_3x_4^2,$$

$$\Gamma_0(x_0)=[-x_0,x_0],\quad\Gamma_1(x_1)=[\frac{1}{2}x_1^2,\frac{3}{2}x_1^2],\quad\Gamma_2(x_2)=[\frac{1}{2}x_2,x_2],\quad\Gamma_3(x_3)=[0,x_3].$$