Contrôle partiel: durée 2 heures.
VEUILLEZ RÉDIGER CHAQUE EXERCICE DE CE DEVOIR SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE
Les documents de cours et de TD ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (6 points)

1. Soient E et F des espaces vectoriels normés, et $\Omega \subset E$ un ouvert. Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour les applications $f : \Omega \to F$. On tâchera à être précis sur toutes les normes en jeu.
2. Réciproque. Quelle borne obtient-on directement sur la différentielle de f en $x \in \Omega$ dans le cas où f est L-lipschitzienne et différentiable en x ?

Solution :

1. Inégalité des accroissements finis pour les fonctions différentiables :
Soit $f : U \to F$ où U est un ouvert de E et E, F sont des espaces normés. Soient $a, b \in U$ tels que le segment $[a,b] = \{ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0,1]\}$ soit inclus dans U. On suppose que f est différentiable en tout point de $[a,b]$ et que la norme de sa différentielle en tout point du segment est bornée par une constante indépendante du point. Alors nous avons l'inégalité suivante
$$\|f(a) - f(b)\|_F \leq \|a-b\|_E \sup_{x\in[a,b]} |||Df(x)|||_{\mathscr{L}(E,F)}.$$
2. Nous allons montrer que si f est L-lipschitzienne et différentiable en x, alors $|||Df(x)|||_{\mathscr{L}(E,F)} \leq L$. Par définition de la différentiabilité, nous avons
$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + o(\|h\|), \quad \text{quand } h \to 0.$$
On se donne un h_0 fixé et on applique l'égalité au-dessus à $h = \varepsilon h_0$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. On trouve
$$f(x + \varepsilon h_0) = f(x) + Df(x)(\varepsilon h_0) + o(\varepsilon),$$
d'où, en divisant par ε,
$$Df(x)(h_0) = \frac{f(x+\varepsilon h_0) - f(x)}{\varepsilon} + o(1),$$
quand $\varepsilon \to 0$. On prend la norme et on utilise que f est L-lipschitzienne :
$$\|Df(x)(h_0)\|_F \leq \Big\|\frac{f(x+\varepsilon h_0) - f(x)}{\varepsilon}\Big\|_F + o(1) \leq L\|h_0\|_E + o(1).$$
En faisant $\varepsilon \to 0$ au dessus il vient que
$$\|Df(x)(h_0)\|_F \leq L\|h_0\|_E.$$
Comme h_0 est arbitraire, on en déduit que $|||Df(x)|||_{\mathscr{L}(E,F)} \leq L$.

Exercice 2. (6 points)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe
$$f(x,y) := \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que f est différentiable partout mais qu'il existe des points où f n'est pas C^1.

Solution :
Montrons que f est différentiable partout mais qu'il existe des points où f n'est pas C^1.
L'ensemble $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \neq 0\}$ est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par la fonction continue $(x,y) \mapsto y$. Il est donc ouvert. f étant obtenue par quotient, composition et produit de fonctions de classe C^1, elle est de classe C^1 dans Ω. De plus, pour $(x,0) \notin \Omega$,

$$|f(x+h_1, 0+h_2) - f(x,0)| = \left| h_2^2 \sin\left(\frac{x+h_1}{h_2}\right) \right| \leq h_2^2 \leq h_1^2 + h_2^2 = \|(h_1,h_2)\|_2^2 = o(\|(h_1,h_2)\|_2),$$

lorsque $h = (h_1,h_2) \to 0$. Donc, f est difféentiable au point $(x,0)$ et $Df(x,0) = 0$.
Pour $(x,y) \in \Omega$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(x/y) - x\cos(x/y)$$

Pour $x = 1$ et $y = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2n\pi}\right) = -1 \to -1 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = Df(1,0)(0,1) = 0$$

Donc, f n'est pas de classe C^1 au point $(1,0)$. Par le même calcul, elle ne l'est pas non plus au point $(2,0)$ et on a bien trouvé *des* points où f n'est pas C^1.

Exercice 3. (8 points)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet exactement trois points critiques, que l'on déterminera.
3. Montrer que la hessienne de f permet de déterminer le type (minimum local, maximum local ou point selle) de deux de ces points critiques.
4. En étudiant le signe de $f(t,t)$ et $f(t,-t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0, montrer que le troisième point critique n'est pas un point d'extremum local.
5. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2).$$

   La fonction f admet-elle un minimum global ? Un maximum global ?

Solution :

1. La fonction f est une fonction de classe C^∞ car polynomiale. Un calcul de ses dérivées partielles donne pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = 4\begin{pmatrix} x^3 - x + y \\ y^3 + x - y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H_f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

2. Les points critiques de f sont les points de son ensemble de définition où son gradient s'annule. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un point critique de f. Il doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

mais la somme de ces deux équations donne $x^3 + y^3 = 0$, donc $x^3 = (-y)^3$, et donc $x = -y$ par injectivité de la fonction cube. Mais en injectant cette identité dans la première équation de notre système, on trouve

$$x^3 = 2x,$$

et donc $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. On a alors respectivement $y = 0$ ou $y = -\sqrt{2}$ ou $y = \sqrt{2}$. On a donc trouvé que si (x, y) est un point critique de f, alors

$$(x, y) \in S := \left\{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\right\}.$$

Réciproquement, on vérifie que les trois points de S résolvent notre système, et donc S est exactement l'ensemble des points critiques de f.

3. On a

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice symétrique a un déterminant et une trace strictement positifs, donc ses 2 valeurs propres sont strictement positives, et par un résultat du cours, les points critiques $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des points de minimum local.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, t) = 2t^4$, qui est strictement positif dès que t est non nul.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t, t) = 2t^4 - 8t^2 = -8t^2 + o_{t\to 0}(t^2)$, et est donc strictement négatif quand t est non nul et proche de 0. En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand (en fait, on vérifie facilement que tous les $n \in \mathbb{N}^*$ conviennent),

$$f\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) < f(0, 0) < f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Comme $(-1/n, 1/n)$ et $(1/n, 1/n)$ tendent vers $(0, 0)$ quand $n \to +\infty$, $(0, 0)$ ne peut pas être un extremum local.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) - \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)\right) &= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 - x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4xy \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2 + 2(x + y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de l'énoncé.
On a donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) \geq \frac{1}{2}\|(x, y)\|^4 - 4\|(x, y)\|^2 \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc en premier lieu, f n'est pas majorée, et donc elle ne peut pas admettre de maximum.
Ensuite, comme f est continue, cette limite implique qu'elle admette au moins un point de minimum global. Or, ses points de minimum global doivent aussi être des points de minimum local, et comme f est de classe C^1, ils doivent aussi être des points critiques de f. Nous avons vu aux questions 2., 3., et 4. que les seuls points critiques de f qui sont des points de minimum local sont $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, ces deux points sont des points de minimum global de f, et ce sont les seuls.

Exercice 4. (8 points) On note E l'espace des fonctions C^1 de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui s'annulent en 0 :

$$E := \left\{\varphi \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ telles que } \varphi(0) = 0\right\}.$$

On admet que E est un espace vectoriel, et que la quantité définie pour $\varphi \in E$ par

$$\|\varphi\|_E := \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|,$$

est une norme sur E. Soit enfin $g \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On s'intéresse à la fonction à valeurs réelles

$$F : \varphi \in E \longmapsto \frac{1}{2}\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt + g(\varphi(1)).$$

1. Différentiabilité. Montrer que F est différentiable et que pour tout φ et h dans E,

$$DF(\varphi)(h) = \int_0^1 \varphi'(t)h'(t)dt + g'(\varphi(1))h(1).$$

2. Étude des points critiques.
   (a) Soit φ un élément de E tel que $DF(\varphi) = 0$. En choisissant h de la forme $h : t \in [0,1] \mapsto at \in \mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$, montrer que
   $$\varphi(1) = -g'(\varphi(1)).$$
   (b) En déduire que
   $$\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt = |\varphi(1)|^2.$$
   (c) En utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que
   $$v = -g'(v) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = vt.$$
3. Réciproque. Montrer que réciproquement, toutes les fonctions de la forme $t \in [0,1] \mapsto vt$ où $v = -g'(v)$ sont des points critiques de F.

Solution :

1. Différentiabilité Tout d'abord nous conidérons l'application $E \ni h \mapsto L(h) := \int_0^1 \varphi'(t)h'(t)dt + g'(\varphi(1))h(1)$. Cette application est évidemment linéaire et satisfait $|L(h)| \leq ||h'||_\infty \int_0^1 |\varphi(t)|dt + |g'(\varphi(1))|||h||_\infty$. En majorant $||h'||_\infty$ et $||h||_\infty$ par $||h||_E$ on trouve $|L(h)|\mathbb{C}||h||_E$, ce qui montre que L est une application linéaire et continue de E dans $\mathbb{R}$.
   Il nous maintenant montrer que l'on a
   $$F(\varphi + h) - F(\varphi) - L(h) = o(||h||_E).$$
   En développont les terms on trouve
   $$F(\varphi + h) - F(\varphi) - L(h) = \frac{1}{2}\int_0^1 |h'(t)|^2 dt + (g(\varphi(1) + h(1)) - g(\varphi(1)) - h(1)g'(\varphi(1))).$$
   On regarde séparément les deux termes. On a
   $$\frac{1}{2}\int_0^1 |h'(t)|^2 dt \leq C||h'||_\infty^2 \leq C||h|L_E^2 = o(||h||_E)$$
   et
   $$g(\varphi(1) + h(1)) - g(\varphi(1)) - h(1)g'(\varphi(1)) = o(h(1)) = o(||h||_\infty) = o(||h||_E).$$
   Cela prouve le résultat.
2. Étude des points critiques.
   (a) On trouve dans ce cas $\int_0^1 \varphi'(t)adt + g'(\varphi(1))a = 0$, donc $a(\varphi(1) - \varphi(0) + g'(\varphi(1))) = 0$. En utilisant $\varphi(0) = 0$, il suffit de prendre $a = 1$ pour avoir le résultat.
   (b) On utilise $h = \varphi$ dans la condition $DF(\varphi)(h) = 0$, et on trouve
   $$\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt = -g'(\varphi(1)))\varphi(1) = |\varphi(1)|^2.$$

(c) On part de $\varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$. On a donc

$$\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt = \left(\int_0^1 \varphi'(t)dt\right)^2,$$

ce qui est un cas d'égalité dans Cauchy-Schartz $\int fg \leq (\int f^2)^{1/2}(\int g^2)^{1/2}$, avec $f = \varphi'$ et $g = 1$. Cela implique que φ' et 1 sont proportionnels, donc $\varphi' = const$. Cela donne $\varphi(t) = vt$, et on trouve $v = \varphi(1) = -g'(\varphi(1)) = -g'(v)$.

3. Réciproque. Si φ est de la forme $\varphi(t) = vt$ où $v = -g'(v)$ alors on a

$$DF(\varphi)(h) = \int_0^1 vh'(t)dt + g'(v)h(1) = (v + g'(v))h(1) = 0,$$

ce qui montre que h est un point critique.