Université de Paris XI **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 2009–2010**

Questions pour le test 3

Primitives, Intégrales, Développements limités
A préparer pour la semaine du 9 novembre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1.— Si f est une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t)dt$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.
2.— Soit $x_1 > 0$. Pour tout $x_2 > x_1$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Big| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\ln x}{x}\, dx \Big| \leq \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} |\ln x| dx\,.$$

3.— En faisant le changement de variables $t = \sin x$ on obtient l'égalité :

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(t)dt = \int_{-5\pi/6}^{\pi/6} f(\sin x)\cos x dx\,,$$

pour toute fonction f continue sur $[-1/2, 1/2]$.
4.— On a l'égalité suivante :

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\, dx = \frac{44\sqrt{2}-8}{105}\,.$$

5.— Soit $a < b$ deux réels et $n \geq 1$ un entier. On définit $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Alors $\int_a^b f^{(k)}(x)dx \neq 0$ si et seulement si $k \in \{n, n+1, \ldots, 2n+1\}$.
6.— La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ mais admet un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$.
7.— La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{e^x}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 5 dont le coefficient du terme en x^5 est 13/30. On admettra que $e \notin \mathbb{Q}$.
8.— On a le $\mathrm{DL}_2(0)$ suivant :

$$\left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)^{1/x} = 1 + x + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\,.$$

9.— On a la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x = 1\,.$$

10.— On a la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)}{x^4} = \frac{1}{12}\,.$$

11.— On a la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/x}-(1+x)^{1/x}\right)=0\,.$$

12.— On a la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e^{1+x}}{\sqrt{1+x}-\cos x}=\frac{1}{2}\,.$$

13.— On a la limite suivante :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,.$$

14.— On a la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sin(x))\tan\left(\frac{2x}{x^2+5}\right)=2\,.$$

15.— La fonction $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0. Ce prolongement est localement au-dessus de sa tangente en 0.

16.— Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\cos(|x|^{1/2})+\lambda\sin|x|$$

admet un minimum local en 0 si et seulement si $\lambda>1/2$.

17.— La fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$$

ne se prolonge pas par continuité sur $\mathbb{R}$. Elle admet une asymptote lorsque $x\to-\infty$. Son graphe est en-dessous de cette droite au voisinage de $-\infty$.

18.— La fonction $f:]-2,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\left(\frac{x^3+\ln x}{2+x}\right)^{1/2}$$

admet une asymptote lorsque $x\to+\infty$. Son graphe se trouve au-dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$.

19.— La fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\left(x^3+x+2\sin x\right)^{1/3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet une asymptote lorsque $x\to+\infty$. Son graphe se trouve au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

Il y a 11 affirmations vraies et 8 affirmations fausses
