Université de Paris XI **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 2009–2010**

Questions pour le test 4

Courbes paramétrées, Fonctions de deux variables
A préparer pour la semaine du 7 décembre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Dans les trois questions suivantes on s'intéresse aux symétries d'une courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ définie pour $t \in \mathbb{R}$.
1.— Si x et y sont T-périodiques pour un certain $T > 0$. Alors on peut se restreindre, pour étudier la courbe γ et tracer la trajectoire à l'intervalle $[0, T/2]$?
2.— Si, pour tout réel t, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première diagonale).
3.— Si, pour tout réel t, $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4.— Considérons les courbes paramétrées $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ suivantes

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (x_1(t), y_1(t)) = (\cos(t), \sin(t)), &\quad t \in \mathbb{R},\\
\gamma_2(t) &= (x_2(t), x_2(t)) = (\cos(t), \sin(t)), &\quad t \in]-\pi, \pi[,\\
\gamma_3(t) &= (x_3(t), y_3(t)) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), &\quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On note Γ_j la courbe associée à γ_j ($j = 1, 2, 3$). On a $\Gamma_1 = \Gamma_2$ et $\Gamma_2 = \Gamma_3$.
5.— La courbe plane associée au paramétrage $(x(t), y(t)) = (|t|, t)$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ est la droite d'équation $y = x$.
6.— La courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ définie pour $t \in [0, +\infty[$ n'a pas de point multiple.
7.— Il existe une courbe paramétrée telle que la courbe plane associée est la lettre O. Il en est de même pour chacune des lettres de l'alphabet[1].
8.— Considérons une courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$. On suppose que cette courbe est inclue dans le disque de centre 0 et de rayon 1 (c'est-à-dire que l'on suppose que $x^2(t) + y^2(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$). Alors nécessairement la longueur de γ est inférieure à 2π.
9.— Si $\gamma\colon [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée de classe C^1 telle que la vitesse instantanée est toujours inférieure à 1 alors la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ est inférieure à 2.
10.— Soit $\gamma : x(t), y(t), t \in [0, 1]$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$. Soit la courbe $\Gamma : X(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}x(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}y(t), X(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}x(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}y(t), t \in [0, 1]$ la distance parcourue sur γ entre les instants 0 et 1 est la même que celle parcourue sur Γ entre ces mêmes instants.
11.— Soient r et θ deux fonctions (de classe $\mathcal{C}^1$) définies sur un intervalle I et Γ la courbe paramétrée par $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1, $t_0 < t_1$ est donnée par la formule

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2}\ dt$$

---

[1] Illustrer un principe de construction sur quelques lettres exemplaires : p.ex. A, E, X

12.— La courbe définie en polaire par $r = \frac{10}{20-30\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$ est une ellipse.
13.— La courbe paramétrée définie par $x(t) = 2+3\cos t$, $y(t) = 2\sin t$ est contenue dans l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 4x + 9y^2 = 20$.
14.— La fonction définie par la formule $f(x, y) = \ln(x^2+3y^2-3xy)$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

15.— Le domaine de définition de la fonction définie par la formule $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 3xy}$ est bordé par les deux droites d'équations $x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}y = 0$ et $x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}y = 0$.

16.— Le domaine de définition de la fonction précédente est voisinage de chacun de ses points.

17.— La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3xy + 3x + y$ y admet un minimum.

18.— La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 3x + y$ y admet un minimum.

19.— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un disque D dont le gradient est nul en tout point est constante sur D.

20.— La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

21.— Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 2y^2 - 1 > 0\}$. La fonction $f : D \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

22.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnant la température en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans un certain modèle météorologique. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma(t), t \in [0, 1]$ la trajectoire d'un avion dans le plan. Si le produit scalaire $\langle \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)\rangle < 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ alors la température de l'avion à l'instant 0 est inférieure à celle à l'instant 1.

23.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il existe alors une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, dont le gradient ne s'annule jamais telle que le graphe de f est la ligne de niveau 0 de g.

Il y a 14 affirmations vraies et 9 affirmations fausses
