Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 1

Exercice 1.1.— Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble où la suite de fonctions (f_n) converge simplement

a) $f_n(x) = x^n$	b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$	c) $f_n(x) = n^x$
d) $f_n(x) = x^n e^n$	e) $f_n(x) = x^n e^x$	f) $f_n(x) = e^{nx}$
g) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$	h) $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$	i) $f_n(x) = n(\cos(\frac{x}{n}) - 1)$

Exercice 1.2.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variations de la fonction f_n. En déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Pour quels $a > 0$ la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, a]$?

Exercice 1.3.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
3. Pour quels $a \in \mathbb{R}^+$ la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

Exercice 1.4.— Etudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.

Exercice 1.5.— Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ (discuter selon la valeur de α).

Exercice 1.6.— Soit I un intervalle et soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers une fonction f.

1. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f et que chacune des fonctions f_n est bornée, alors f est bornée.
2. Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions bornées dont la limite simple n'est pas bornée.

Exercice 1.7.— Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur l'intervalle I vers une fonction continue f et soit (x_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $x \in I$. Montrer que la suite numérique $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$. Est-ce toujours vrai lorsque (f_n) converge seulement simplement ?

Exercice 1.8.— Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite (f_n).
2. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la série $(\sum f_n)$.

Exercice 1.9.— Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^\alpha x^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $f_n(\frac{1}{n})$. En déduire que pour $\alpha \leq 2$ la suite (f_n) ne converge pas uniformé ment.
3. * Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha > 2$. *(Indication : étant donné $\beta \geq 1$, majorer $|f_n(x)|$ sur $[0, \frac{1}{n^\beta}]$ et sur $[\frac{1}{n^\beta}, +\infty[$, puis choisir β convenablement.)*