

Fiche d'exercices n° 10: Homographies, principe du maximum, théorème de Liouville

Exercice 1 (Équations de droites et de cercles dans \mathbb{C}). Dans la suite on identifie le plan affine \mathbb{R}^2 muni du repère $(0, (1, 0), (0, 1))$ avec \mathbb{C} via l'identification $(x, y) \mapsto x + iy$.

1. Soient \vec{u}, \vec{w} deux vecteurs d'affixes u, w . Montrer que :
 - (a) \vec{u} et \vec{w} sont colinéaires si et s. si $u\bar{w} - \bar{u}w = 0$.
 - (b) \vec{u} et \vec{w} sont orthogonaux si et s. si $u\bar{w} + \bar{u}w = 0$.
2. Donner une équation de la forme $\bar{a}z + a\bar{z} = b$ pour une droite D passant par un point d'affixe z_0 et orthogonale à un vecteur d'affixe $u \neq 0$. On exprimera a et b en fonction de u et z_0 .
3. Réciproquement, soient $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Justifier que l'équation $\bar{a}z + a\bar{z} = b$ définit une droite.
4. Justifier que $b = 0$ si et s. si la droite passe par 0.
5. On considère le cercle de centre d'affixe c et de rayon $R > 0$. Donner une équation de ce cercle. (*Indication : elle est du type de la question suivante.*)
6. Soient $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|a|^2 - b > 0$ alors

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$$

est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de a et b .
 Que se passe-t-il si $|a|^2 - b \leq 0$? Que peut-on dire si $b = 0$?

Exercice 2 (Homographie dans $\widehat{\mathbb{C}}$). On considère l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}$ obtenu en ajoutant à \mathbb{C} un élément, noté par convention ∞ . Ainsi, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. Une homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une application

$$h : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \begin{cases} a/c & \text{si } z = \infty; h(\infty) = \infty \text{ si } c = 0, \\ \infty & \text{si } z = -d/c, \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que si $ad - bc = 0$ alors l'application précédente est constante et que si $ad - bc \neq 0$ alors elle est bijective et son application inverse est l'homographie $z \mapsto -\frac{dy-b}{cy-a}$.

Par convention, une droite de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une droite de \mathbb{C} à laquelle on a ajouté le point ∞ ; un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ est un cercle de \mathbb{C} . Soit h_0 l'homographie définie par : $h_0(z) = 1/z$.

2. Soit D une droite contenant 0. Montrer que $h_0(D)$ est une droite contenant 0.
3. Soit D une droite ne contenant pas 0. Montrer que $h_0(D)$ est un cercle passant par 0.
4. Soit C un cercle tel que $0 \notin C$. Montrer que $h_0(C)$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon en fonction de ceux de C .
5. Dédurre des questions précédentes que l'image d'une droite ou d'un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ par une homographie est une droite ou un cercle.

Indication : si $c \neq 0$ et $cz + d \neq 0$, remarquer que $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$.

6. On considère l'homographie h définie par $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

- (a) Déterminer l'image de \mathbb{R} et de $i\mathbb{R}$ par h .
- (b) Idem pour l'image du quadrant $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Exercice 3. Soit $\varphi : z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer $\varphi(\gamma)$ où :

- 1) γ est le cercle de centre i et de rayon 1.
- 2) γ est la droite d'équation $2x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 4. 1) Déterminer l'image de l'axe réel par l'homographie $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

- 2) En déduire l'image par f du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$
- 3) Déterminer l'image de la bande $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ par $g(z) = -e^z$.
- 4) Déduire des questions précédentes une transformation conforme transformant la bande B en le disque unité $D(0, 1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Exercice 5. Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.

- 1) Trouver l'image par f de la droite d'équation $\{x = \frac{\pi}{2}\}$.
- 2) Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = 0\}$.
- 3) Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi, y = a\}$ avec $a > 0$.

Exercice 6 (Lemme de Schwarz.). Soit $D = D(0, 1)$ le disque unité ouvert et soit f holomorphe sur D . On suppose que : $f(0) = 0$ et $f(D) \subseteq D$.

- 1. En considérant $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.
- 2. On suppose de plus que $|f'(0)| = 1$ ou bien qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et pour tout $z \in D$, $f(z) = \lambda z$.

Exercice 7. Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$. Montrer que f est constante.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$.

- 1. Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que son ordre comme zéro de f est supérieur ou égal à son ordre comme zéro de g .
- 2. En déduire que f et g sont proportionnelles.