Feuille d'exercices n° 11 : Courbes et surfaces

Exercice 1. (Courbes isométriques) Le but de cet exercice est de montrer que les courbes régulières planes sont caractérisées complètement, modulo une isométrie, par la courbure et la norme des vecteurs tangents. Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^2$ deux courbes C^2 régulières en tout point telles que pour tout $t \in I$

— $\|\gamma_1'(t)\| = \|\gamma_2'(t)\|$;

— $c_1(t) = c_2(t)$ où $c_j = \frac{\gamma_j' \wedge \gamma_j''}{\|\gamma_j'\|^3}$ (de sorte que $\kappa_j = |c_j|$).

Nous allons montrer qu'on peut envoyer γ_1 sur γ_2 par une translation et une rotation.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où γ_1 et γ_2 sont paramétrées par la longueur d'arc.

On fixe un $t_0 \in I$.

b) Montrer qu'on peut se ramener au cas $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$.

c) Montrer maintenant qu'on peut se ramener au cas $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0)$.

On suppose dans le reste de cet exercice que γ_1 et γ_2 sont paramétrées par la longueur d'arc, que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ et que $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0)$.

d) Montrer que pour tout t nous avons l'égalité $\gamma_j''(t) = c_j(t)\gamma_j'(t)^\perp$.

e) En déduire que $\frac{d}{dt}\|\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t)\|^2 = 0$.

f) Conclure.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$, ainsi que sa surface de niveau 0 dans $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 1)$.

b) Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$ cette surface est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$.

c) Écrire le pôlynome de Taylor d'ordre deux de g au point $(1, 1)$. Quelle est la matrice hessienne de g en ce point ?

d) Quelle est la position de la surface par rapport au plan tangent ?

Exercice 3. Soit $\mathcal{S}$ la surface paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) = u^2, \\ y(u,v) = uv, \qquad\qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2. \\ z(u,v) = 2u + v, \end{cases}$$

a) Déterminer l'unique point de $\mathcal{S}$ qui ne soit pas régulier.

b) Trouver une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point de paramètres $(1, 1)$.

c) Montrer que $\mathcal{S}$ est incluse dans la surface d'équation cartésienne

$$(2x + y)^2 = z^2 x.$$

Cette inclusion est-elle une égalité ?

d) Retrouver l'équation du plan de la question 2 en utilisant l'équation cartésienne de la question 3.