Feuille d'exercices n° 12 : Surfaces, formes fondamentales, géodésiques

Exercice 1. (Paramétrage stéréographique) Soit S la surface paramétrée par $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(s,t) = \Big(\frac{2s}{1+s^2+t^2}, \frac{2t}{1+s^2+t^2}, \frac{s^2+t^2-1}{1+s^2+t^2}\Big).$$

a) Quel est le support de S ?

b) Montrer que S est régulière et calculer son plan tangent en tout point.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et S la surface paramétrée par $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(s,t) = (s\cos t, s\sin t, f(s,t)).$$

a) Déterminer les points singuliers de φ.

b) Pour un point régulier, déterminer l'intersection du plan tangent avec l'axe $\overrightarrow{Oz}$.

Exercice 3. (Quadriques à centre) Soient a, b, c trois réels non nuls, $k \in \mathbb{R}$, et $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = k$$

que l'on suppose non vide et non réduite à un point.

a) Montrer qu'au voisinage de tout point de $S \setminus \{0\}$ on peut exprimer une des variables en fonction des deux autres. Calculer les dérivées d'ordre 2 de la fonction implicite trouvée.

b) Écrire l'équation et la paramétrisation du plan tangent en tout point.

c) Déterminer la courbure de Gauss en tout point.

d) Dans le cas $k = 0$, peut-on exprimer une des variables en fonction des deux autres au voisinage de l'origine ?

Exercice 4. Soit $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$.

a) Trouver l'équation du plan tangent en tout point.

b) Calculer la première et la second forme fondamentale en tout point.

c) Soit $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$ et w un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en A. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une géodésique γ de $\mathscr{C}$ définie sur l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma'(0) = w$. Trouver une formule pour γ.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2, et soit

$$\mathscr{S} := \{(x, y, \varphi(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

son graphe. Paramétrer le plan tangent et calculer la courbure de Gauss en tout point de $\mathscr{S}$.