Feuille d'exercices n^o 1: Fonctions différentiables, différentielles

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - x + 2$. Soient $a, h \in \mathbb{R}$. Développer $f(a+h)$ et montrer que f est différentiable en a.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en a. Montrer que f est différentiable en a et donner la différentielle de f en a en fonction de $f'(a)$.
2. Réciproquement, on suppose f différentiable en a. Montrer que f est dérivable en a et donner $f'(a)$ en fonction de $Df(a)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'on a les implications suivantes : $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C)$ où

(A) Les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de a.
(B) f est différentiable en a.
(C) Les dérivées partielles de f existent en a.

À l'aide des fonctions suivantes, montrer que les réciproques sont fausses en général (respectivement $(B) \Rightarrow (A)$ et $(C) \Rightarrow (B)$).

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 4. Calculer là où elle existe la différentielle des applications $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x+y$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5. Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Calculer la différentielle des fonctions $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x+y)$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x-y)$.

Exercice 6. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, $a \in U, v \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de $t \mapsto f(a+tv)$ en $t=0$ en fonction de la différentielle de f en a. Application : $f(x,y) = \exp(x^2 - y^3), a = (0,1), v = (2,0)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0,y) = 0$ et $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ alors que f n'est pas continue en ce point.