**Feuille d'exercices n° 1: Fonctions différentiables, différentielles**

**Exercice 1.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - x + 2$. Soient $a, h \in \mathbb{R}$. Développer $f(a+h)$ et montrer que $f$ est différentiable en $a$.

**Exercice 2.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $f$ est dérivable en $a$. Montrer que $f$ est différentiable en $a$ et donner la différentielle de $f$ en $a$ en fonction de $f'(a)$.
2. Réciproquement, on suppose $f$ différentiable en $a$. Montrer que $f$ est dérivable en $a$ et donner $f'(a)$ en fonction de $Df(a)$.

**Exercice 3.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'on a les implications suivantes : $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C)$ où

(A) Les dérivées partielles de $f$ existent et sont continues au voisinage de $a$..
(B) $f$ est différentiable en $a$.
(C) Les dérivées partielles de $f$ existent en $a$.
À l'aide des fonctions suivantes, montrer que les réciproques sont fausses en général.

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Exercice 4.** ($\star$) Calculer la différentielle des applications suivantes $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x+y$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$.

**Exercice 5.** ($\star$) On rappelle que la norme $L^p$ d'un vecteur $X$ dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\|X\|_p = (X_1^p + \cdots + X_n^p)^{\frac{1}{p}}$. L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p$ est-elle différentiable en 0 ? Même question pour $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p^p$ ? Calculer la différentielle quand elle existe.

**Exercice 6.** ($\star$) Soit $f$ une fonction $C^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Calculer la différentielle de $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x+y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x-y)$.

**Exercice 7.** ($\star$)

1. Soient $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1$ et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = x(t)^2 + y(t)^3$.
   Déterminer $h'(t)$ en fonction de $x'(t)$ et $y'(t)$.
2. Cas général : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe $C^1$ et on définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h(t) = f(x(t), y(t))$.
   Déterminer $h'(t)$ en fonction de $x'(t)$, $y'(t)$ et des dérivées partielles de $f$.

**Exercice 8.** ($\star$) Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, $a \in U, v \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de $t \mapsto f(a+tv)$ en $t=0$ en fonction de la différentielle de $f$ en $a$. Application : $f(x,y) = \exp(x^2 - y^3), a = (0,1), v = (2,0)$.

**Exercice 9.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0,y) = 0$ et $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que $f$ admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ alors que $f$ n'est pas continue en ce point.

**Exercice 10.** Calculer les dérivés partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \min(x, y^2)$.

**Exercice 11.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application diffŕentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy) \qquad h(x,y,z) = f(2x - yz, xy - 3z).$$

Déterminer les dérivées partielles de $g$ et $h$ en fonction de celles de $f$ et écrire les matrices jacobiennes de $g$ et $h$ en un point quelconque.

**Exercice 12.** ($\star$) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

**Exercice 13.** ($\star$) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $u, v, w$ pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ (où $p$ est une constante non nulle).