Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 2: Fonctions différentiables

Exercice 1. On rappelle que, pour tout naturel $p \geq 1$, la norme L^p d'un vecteur $X = (X_1, ..., X_n) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par $\|X\|_p = (|X_1|^p + \cdots + |X_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p \in \mathbb{R}^+$ est-elle différentiable en 0 ? Même question pour $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p^p$? Calculer la différentielle quand elle existe.

Exercice 2. Calculer les dérivés partielles de la fonction : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \min(x, y^2)$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où elles existent.

Exercice 3. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{tr}(AB)$. Calculer la différentielle de f en tout point.
À quelle condition $Df(A)$ est-elle surjective ?

Exercice 4. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$. Calculer la différentielle de f en tout point. A quelle condition sur B la différentielle $Df(A)$ est surjective / injective ?

Exercice 5. Soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}\left({}^tAA\right)$. Calculer la différentielle de f en tout point.

Exercice 6. On note det et tr le déterminant et la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la différentielle de det en $X \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \mathrm{tr}({}^t\overline{X}H)$ où $\overline{X}$ est la comatrice de X.