
Feuille d'exercices n° 2: Fonctions différentiables

Exercice 1. (★) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \text{tr}(AB)$. Calculer la différentielle de f en tout point.
À quelle condition Df est-elle surjective ?

Exercice 2. (★) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$. Calculer la différentielle de f en tout point. En quels points Df est-elle surjective ? injective ?

Exercice 3. (★) Soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}({}^tAA)$. Calculer la différentielle de f en tout point.

Exercice 4. (★) On note \det et tr le déterminant et la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la différentielle de \det en $X \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \text{tr}({}^t\bar{X}H)$ où \bar{X} est la comatrice de X .

Exercice 5. (★) Soit $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Déterminer la différentielle de f , d'abord en $M = I_n$ puis en un point M quelconque.

Exercice 6. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E (i.e. $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$).

1. On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle u(x), x \rangle$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.
2. Soit $g : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\langle x, x \rangle}.$$

Montrer que g est différentiable en tout point.

Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$Dg(a) = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

Exercice 7. (★) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est homogène de degré α si

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(t(x, y)) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Pour l'implication " \Leftarrow ", on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle.

Exercice 8. (★) On note $C^0([0, 1])$ les fonctions continues sur $[0, 1]$. Soit $f : \varphi \in C^0([0, 1]) \mapsto \int_0^1 \varphi^4(t) dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f .

Exercice 9. (★) Soit $f : \varphi \in C^2([0, 1]) \mapsto \int_0^1 (\varphi')^2(t) \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f . Caractériser les éléments $\varphi \in C^2([0, 1])$ tels que la différentielle Df s'annule en φ .