Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 3

Exercice 3.1.— Pour tout entier non nul n, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) := \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
   Indication. Pour $x > 1$, on pourra utiliser la relation $\frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n}$.
2. Étudier la continuité de sa somme sur son domaine de définition.
   Indication. On pourra étudier la monotonie de la suite $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)$ et utiliser l'indication précédente.

Exercice 3.2.— Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
2. $x \mapsto \ln(1-x)$
3. $x \mapsto \ln(1+x)$
4. $x \mapsto e^x$
5. $x \mapsto \cos(x)$
6. $x \mapsto \sin(x)$
7. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
8. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

Dans chaque cas, on précisera le rayon de convergence puis le domaine de convergence de la série considérée.

Exercice 3.3.— Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{ch}(na)\frac{x^n}{n}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.4.—

1. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$, en précisant le domaine de convergence de la série.
2. Après avoir déterminé le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$, calculer sa somme.

Exercice 3.5.— Définissons deux fonctions F et G sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

$$F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \qquad \text{et} \qquad G(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2.$$

1. Montrer que F et G sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elles vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) + G'(x) = 0.$$

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 3.6.— On considère la fonction Gamma définie par $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition Δ de Γ.
2. Montrer que pour tout x de Δ, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ et y expliciter Γ'.

Exercice 3.7.— Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt \, .$$

1. Vérifer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner f'.
3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer f' puis f.
4. En déduire une expression simple de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2} dt$.

Exercice 3.8.— On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt \, .$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis que $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Pour $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-ax^2}$.
   – Expliquer pourquoi $\mathcal{F}(f_a)$ est bien définie.
   – Montrer que $\mathcal{F}(f_a)$ est solution de $2ay' + xy = 0$.
   – Déterminer $\mathcal{F}(f_a)$.
3. Déduire de ce qui précède :
   – que les fonctions $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ sont vecteurs propres de $\mathcal{F}$,
   – une expression simple de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x) \, dx$ lorsque $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Quelques exercices supplémentaires, plus théoriques et/ou difficiles :

Exercice 3.9.— On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt \, .$$

a) Après avoir justifié que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$, montrer qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
b) Montrer que f et g sont continues en 0.
c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \, .$$

Exercice 3.10.— Pour $x, t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x,t) = e^{-xt}\mathrm{sinc}(t)$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)dt$.
a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} g_n(x,u)du$ pour une certaine fonction g_n que l'on déterminera.

b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

c) On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que U est continue sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer U sous la forme d'une intégrale convergente.

d) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $U'(x)$.

e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de $U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 3.11.—Autour de la fonction Γ

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$. Rappelons aussi que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. a) Montrer que Γ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

   b) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, montrer que

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) \, dy$$

   où f_n vérifie :

$$f_n(y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in]-\infty, -\sqrt{n}] \ , \quad 0 \leqslant f_n(y) \leqslant e^{-y^2/2} \quad \text{pour} \quad y \in]-\sqrt{n}, 0] \, ,$$

   et $\qquad 0 \leqslant f_n(y) \leqslant (1+y)e^{-y} \quad \text{pour} \quad y \in]0, +\infty[\, .$

   d) En utilisant les majorations précédentes, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists A > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \, , \left| \int_{]-\infty, -A[\cup]A, +\infty[} f_n(y) dy - \int_{]-\infty, -A[\cup]A, +\infty[} e^{-y^2/2} dy \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

   e) Montrer que (f_n) converge uniformément vers $y \mapsto e^{-y^2/2}$ sur tout compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

   f) En utilisant les deux questions précédentes, montrer la formule de Stirling :

$$n! \sim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi n} \, \frac{n^n}{e^n} \, .$$

2. On cherche maintenant à calculer $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} \, dt$.

   a) Montrer que pour tout $t \in [0, n]$, on a

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant e.e^{-t} \, .$$

   b) Établir que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} \, dt \, .$$

   Indication. On essaiera d'adapter la démarche suivie aux questions 1)d) à 1)f). Pour cela, on pourra introduire la suite de fonctions (g_n) avec $g_n(t) = \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ si $t \in [0, n]$ et $g_n(t) = 0$ si $t > n$ et utiliser le découpage $\mathbb{R}^+ = ([0, \frac{1}{A}[\cup]A, +\infty[) \cup [\frac{1}{A}, A]$ (pour $A \geq 1$).

   c) Observer que

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln(n) + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

   d) On rappelle que la constante d'Euler γ est définie par $\gamma := \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$. Déduire de la relation précédente que $\Gamma'(1) = -\gamma$.