Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 4

Exercice 4.1.— Définissons deux fonctions F et G sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

$$F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 .$$

1. Montrer que F et G sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elles vérifient :
$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad F'(x) + G'(x) = 0\,.$$
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 4.2.— On considère la fonction Gamma définie par $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition Δ de Γ.
2. Montrer que pour tout x de Δ, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ et y expliciter Γ'.

Exercice 4.3.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt\,.$

1. Vérifer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner f'.
3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer f' puis f.
4. En déduire une expression simple de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2}\,dt$.

Exercice 4.4.— Ici on note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont continues et telles que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}\,dt\,.$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis que $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Pour $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) = e^{-at^2}$.
   – Expliquer pourquoi $\mathcal{F}(f_a)$ est bien définie.
   – Montrer que $\mathcal{F}(f_a)$ est solution de l'équation différentielle $2ay'(x) + xy(x) = 0$.
   – Déterminer $\mathcal{F}(f_a)$.
3. À partir de ce qui précède :
   – déduire que les fonctions $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ sont vecteurs propres de $\mathcal{F}$,
   – obtenir une expression simple de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,dx$ lorsque $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Quelques exercices supplémentaires, plus théoriques et/ou difficiles :

Exercice 4.5.— On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt\,.$$

a) Après avoir justifié que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$, montrer qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
b) Montrer que f et g sont continues en 0.
c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 4.6.— Pour $x, t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x,t) = e^{-xt}\mathrm{sinc}(t)$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)\,dt$.
a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} g_n(x,u)\,du$ pour une certaine fonction g_n que l'on déterminera.
b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
c) On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que U est continue sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer U sous la forme d'une intégrale convergente.
d) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $U'(x)$.
e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de $U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.