Feuille d'exercices n° 6 : Inversion locale et globale

Exercice 1. Soit $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ et soit f définie sur U par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 2 (Inversion globale)**.** Soient k une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Supposons que l'image de f est non vide, et que f est k-dilatante (pour une certaine norme), i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que f est alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

a) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. (On pourra raisonner sur des suites.)
b) Montrer que la différentielle $Df(x)$ est inversible pour tout x.
c) Utiliser le théorème d'inversion globale pour conclure que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.
b) Montrer qu'il existe une constante k telle que

$$\|f(x,y) - f(x',y')\| \geq \|(x,y) - (x',y')\|$$

pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. (On pourra travailler avec la norme 1 de $\mathbb{R}^2$.)
En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer $Df^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Exercice 4. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et on note I la matrice identité de E. Soit $f : E \to E$ définie par $f(A) = A^2$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $A \in E$ tel que $\|A - I\| < \alpha$, A admet une racine carrée.

Exercice 5. Soit E l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Montrer que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I), mais que ce n'est pas un difféomorphisme global de E sur son image pour $n \geqslant 2$.

Exercice 6 (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)**.** On note E l'espace des matrices réelles $n \times n$ et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$, inversible. Soit

$$\varphi : E \to S, \qquad \varphi(M) = M^t A_0 M.$$

a) Montrer que $D\varphi(I)$ est surjective.
b) Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans S et une application $A \mapsto M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que $A = M^t A_0 M$ pour tout $A \in V$.
(On pourra appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de φ à $A_0^{-1}S$.)