Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

UE de calcul différentiel et analyse complexe

Feuille d'exercices n° 7: Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann

---

Terminologie. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On emploiera de façon équivalente les termes : f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, f est dérivable en z_0, f est holomorphe en z_0. Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension 2), on emploiera le terme f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0. Ainsi, une fonction est holomorphe en z_0 si et s. si f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et satisfait les conditions de Cauchy-Riemann en z_0.

Exercice 1 ($\star$)**.** Soient $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = \mathrm{Re(z)}$ et $h(z) = \mathrm{Im(z)}$. Montrer que ces fonctions ne sont dérivables en aucun point de $\mathbb{C}$.

Exercice 2 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f satisfait les conditions de Cauchy-Riemann à l'origine mais que f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en ce point.

Exercice 3 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(x + iy) = x^3 + iy^3$. En quels points de $\mathbb{C}$ la fonction f est-elle holomorphe ?

Exercice 4 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale associée à un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, exprimer $g'(z)$ en fonction de f.
2. Montrer que la fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe en 0 si et s. si $f'(0) = 0$.

Exercice 5 ($\star$)**.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{\mathrm{Re}(z)}$ n'est dérivable en aucun point.

Exercice 6 ($\star$)**.** Soit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On suppose que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et que sa différentielle est continue en tout point. Est-il possible que f ne soit holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$?
Indication : on pourra chercher un exemple où $f(x + iy)$ est un polynôme de degré 1 en $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Soit f une fonction holomorphe. On note $\tilde{f}$ la fonction correspondante de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle $D\tilde{f}(x, y)$ est une similitude directe (i.e. composée d'une homothétie et d'une rotation).

Exercice 8 ($\star$)**.** Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur cet ouvert. Démontrer que chacune des conditions suivantes implique que f est constante.

1. f' est nulle sur U.
2. $\mathrm{Re}(f)$ est constante.
3. $\mathrm{Im}(f)$ est constante.
4. $\overline{f}$ est holomorphe sur U.
5. $|f|$ est constante.

Exercice 9. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que f est anti-holomorphe sur U si la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur l'ouvert conjugué $\overline{U}$.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et s. si $\overline{f}$ est anti-holomorphe sur U.
2. Soit U un ouvert tel que $\overline{U} = U$ et soit g une fonction anti-holomorphe sur U. Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes f_1 et f_2 sur U telles que pour tout $z \in U$, $g(z) = \overline{f_1}(z) = f_2(\overline{z})$.

Exercice 10 ($\star$)**.** Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$ et de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que Re(f) et Im(f) sont harmoniques. On rappelle qu'une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si $\sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial {x_i}^2} = 0$.

L'étudiant curieux pourra s'intéresser à une forme de réciproque qui dit : Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit g une fonction harmonique sur U, alors g est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U ; regarder $f = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}$.