

---

Feuille d'exercices n° 7: Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann

---

**Terminologie.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$ . On emploiera de façon équivalente les termes :  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ ,  $f$  est dérivable en  $z_0$ ,  $f$  est holomorphe en  $z_0$ . Comme  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (de dimension 2), on emploiera le terme  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable en  $z_0$ . Ainsi, une fonction est holomorphe en  $z_0$  si et s. si  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable en  $z_0$  et satisfait les conditions de Cauchy-Riemann en  $z_0$ .

**Exercice 1** (★). Soient  $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définies par  $f(z) = \bar{z}$ ,  $g(z) = \operatorname{Re}(z)$  et  $h(z) = \operatorname{Im}(z)$ . Montrer que ces fonctions ne sont dérivables en aucun point de  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 2** (★). Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$  si  $z \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  satisfait les conditions de Cauchy-Riemann à l'origine mais que  $f$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -dérivable en ce point.

**Exercice 3** (★). Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par  $f(x + iy) = x^3 + iy^3$ . En quels points de  $\mathbb{C}$  la fonction  $f$  est-elle holomorphe ?

**Exercice 4** (★). Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction polynomiale associée à un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ .

1. Montrer que la fonction  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{C}$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , exprimer  $g'(z)$  en fonction de  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \overline{f(z)}$  est holomorphe en 0 si et s. si  $f'(0) = 0$ .

**Exercice 5** (★). Montrer que la fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^{\operatorname{Re}(z)}$  n'est dérivable en aucun point.

**Exercice 6** (★). Soit une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose que  $f$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable sur  $\mathbb{C}$  et que sa différentielle est continue en tout point. Est-il possible que  $f$  ne soit holomorphe en aucun point de  $\mathbb{C}$ ?  
*Indication : on pourra chercher un exemple où  $f(x + iy)$  est un polynôme de degré 1 en  $x, y \in \mathbb{R}$ .*

**Exercice 7** (★). Soit  $f$  une fonction holomorphe. On note  $\tilde{f}$  la fonction correspondante de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la différentielle  $D\tilde{f}(x, y)$  est une similitude directe (i.e. composée d'une homothétie et d'une rotation).

**Exercice 8** (★). Soit  $U$  un ouvert connexe et  $f$  une fonction holomorphe sur cet ouvert. Démontrer que chacune des conditions suivantes implique que  $f$  est constante.

1.  $f'$  est nulle sur  $U$ .
2.  $\operatorname{Re}(f)$  est constante.
3.  $\operatorname{Im}(f)$  est constante.
4.  $\bar{f}$  est holomorphe sur  $U$ .
5.  $|f|$  est constante.

**Exercice 9.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est anti-holomorphe sur  $U$  si la fonction  $z \mapsto f(\bar{z})$  est holomorphe sur l'ouvert conjugué  $\bar{U}$ .

1. Montrer que  $f$  est holomorphe sur  $U$  si et s. si  $\bar{f}$  est anti-holomorphe sur  $U$ .
2. Soit  $U$  un ouvert tel que  $\bar{U} = U$  et soit  $g$  une fonction anti-holomorphe sur  $U$ . Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes  $f_1$  et  $f_2$  sur  $U$  telles que pour tout  $z \in U$ ,  $g(z) = \overline{f_1(z)} = f_2(\bar{z})$ .

**Exercice 10** ( $\star$ ). Soit  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont harmoniques. On rappelle qu'une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est harmonique si  $\sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = 0$ .

*L'étudiant curieux pourra s'intéresser à une forme de réciproque qui dit : Soit  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  et soit  $g$  une fonction harmonique sur  $U$ , alors  $g$  est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur  $U$  ; regarder  $f = \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y}$ .*