
Feuille d'exercices n° 7: Fonctions implicites

Exercice 1 (Deux équations, deux inconnues)**.**

1. Discuter des solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ ex + dy &= v, \end{aligned}$$

   où u, v sont donnés et x, y sont les inconnues, selon le rang de la matrice du système.

2. Soient maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longmapsto \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1.
   On écrira $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. On veut discuter le système d'équations

$$f(x, y) = u, g(x, y) = v \tag{1}$$

   aux inconnues (x, y) pour u, v donnés. On suppose que la différentielle $D\varphi(x, y)$ est de rang 2 en tout point $(x, y) \in U$. Montrer que le système (1) admet une solution unique (localement, en un sens que l'on précisera).

Exercice 2. Etudier la courbe $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $p = (0, 0)$ et $q = (1, 1)$. On donnera, pour cela, un DL à l'ordre 2 de la fonction implicite trouvée.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et pour tout $x \in I$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus d. On le munit suivante :

$$\text{Pour tout } P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d, \qquad \|P\| := \max(|a_i|,\ i = 0, \ldots, d).$$

Soit $P_0 = c_0 + c_1 X + \cdots + c_d X^d$ un polynôme de E ayant une racine $x_0 \in \mathbb{R}$ que l'on supposera simple. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $|a_i - c_i| < \varepsilon$, le polynôme $P = a_0 + \cdots + a_d X^d$ admet une unique racine simple x_P dans $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ et la fonction $P \mapsto x_P$ est de classe C^1.
Remarque : avec moins de rigueur, on dira que les racines simples dépendent continûment (et même de façon C^1) des coefficients du polynôme.
<u>Indication</u> : On pourra considérer $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(P, x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$.

Exercice 5 (L'équation du troisième degré et discriminants)**.** On note (x, p, q) trois variables réelles. Trouvez le plus gros ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'équation $x^3 - px + q = 0$ définit x comme fonction implicite de p et q ? Cette fonction est-elle C^1 ?