
Feuille d'exercices n° 8: Déterminations holomorphes, intégrales complexes

---

Exercice 1 (Racine p-ième)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $p \geq 2$ un entier. On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$, $(f(z))^p = z$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe du log sur U alors il existe une détermination de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.
2. Soit f une détermination holomorphe de de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$, $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.
3. On suppose U connexe et on considère deux déterminations holomorphes f_1 et f_2 de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.
4. En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U alors il en existe exactement p distinctes. Quelles sont-elles ?
5. Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que $f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.
6. Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe g de $z \mapsto z^{1/2}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ telle que $g(-1) = i$. Déterminer $g(U)$.

Exercice 2 (Racine carrée d'une fonction holomorphe)**.** Soit U le plan complexe privé des deux demi-droites $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ de l'axe réel.

1. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 1$. Montrer que $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
2. On note log la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur U. Calculer son carré et sa dérivée.
3. Notons V le plan complexe privé du segment réel $[-1, 1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit alors $g : V \to \mathbb{C}$ par $g(z) = izf(z^{-1})$. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.

Exercice 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe f sur U telle que $\sin(f(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de arcsinus alors $-1 \notin U$ et $1 \notin U$.
2. Soit U un ouvert de C ne contenant ni 1 ni -1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) f est une détermination holomorphe sur U de arcsinus.
   (b) Il existe g holomorphe sur U telle que $g(z)^2 = 1 - z^2$ et $e^{if(z)} = iz + g(z)$ pour tout $z \in U$.
3. Montrer que dans ce cas, $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$ pour tout $z \in U$.
4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. Montrer qu'il existe une unique détermination f de arcsinus sur U telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4 ($\star$)**.** Trouver l'erreur dans : $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Exercice 5 ($\star$)**.** Pour $z \in \mathbb{C}^*$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^z.

Exercice 6 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - 1$. Soit $I_k = \displaystyle\int_{\gamma_k} f(z)dz$ où $\gamma_1(t) = t + it^2$ avec $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = e^{t+it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_3(t) = \cos(t) + i\sin(2t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.
Montrer que $I_1 = -5/3 - i/3$, $I_2 = e^{6\pi}/3 - e^{2\pi} + 2/3$, $I_3 = 0$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Montrer que $\displaystyle\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz = \frac{\ln(5)}{2} + i(\arctan(3) - \frac{\pi}{4})$.

Exercice 8 ($\star$)**.** Pour $r > 0$, soit $\gamma_r : [-\pi/2; \pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Calculer $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2} dz$.

Exercice 9 ($\star$)**.** Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct.
Calculer $\displaystyle\int_C (z + \frac{1}{z})^{2n} \frac{1}{z} dz$ avec $n \in \mathbb{N}$. On pensera à utiliser la formule du binôme pour développer $(z + \frac{1}{z})^{2n}$. En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n}(t)dt$.
Déterminer également les valeurs de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1}(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1}(t)dt$.