Feuille d'exercices n° 8 : Courbes paramétrées

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Montrer que le graphe de f est une courbe paramétrée $\gamma(x) = (x, f(x))$ régulière partout.

b) Montrer que la courbure au point d'abscisse x est $\dfrac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$.

Exercice 2. La *spirale logarithmique* est la courbe paramétrée par $M(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a) Dessiner la spirale et montrer qu'elle est régulière partout.

b) Si on désigne par $v(t)$ le vecteur vitesse au point $M(t)$, montrer que l'angle entre $\overrightarrow{OM(t)}$ et $v(t)$ est constant ; le déterminer.

c) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, et le déterminer, tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la longueur de la courbe pour $t \in]-\infty, t_0]$ est égale à $\lambda \cdot \|\overrightarrow{OM(t_0)}\|$.

d) Trouver un paramètre par longueur d'arc $s(t)$ et reparamétrer la spirale par longueur d'arc.

e) Déterminer la courbure en un point quelconque.

Exercice 3. Montrer que la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1,\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1$ possède un unique point double. Déterminer une équation des tangentes en ce point.

Exercice 4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients A, B pour que la courbe donnée par :

$$t \mapsto (\cos(t), \cos(t) + At, \cos(t) + Bt^2)$$

soit contenue dans un plan.

Exercice 5 (examen de mai 2023)**.** On considère la courbe plane C d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 = 1$.

a) Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1, 1)$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

b) Trouver tous les points de la courbe au voisinage desquels le théorème des fonctions implicites ne s'applique ni pour exprimer x en fonction de y ni pour exprimer y en fonction de x.

Exercice 6 (examen de juillet 2023)**.** Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, la courbe définie par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

a) Prouver qu'il s'agit d'une courbe C^∞ réguière et calculer sa courbure en tout point.

b) S'agit-il d'une courbe plane (dont l'image est contenue dans un plan) ?

c) Exprimer sa longueur $\mathrm{long}(\gamma)$ à l'aide d'une intégrale et prouver $\sqrt{3} \leq \mathrm{long}(\gamma) \leq 2$.

Exercice 7. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe birrégulière paramétrée par longueur d'arc. Pour $s_0 \in [a,b]$, on pose $T(s_0) = \gamma'(s_0)$ le vecteur tangent unitaire au point $\gamma(s_0)$, $N(s_0) = \frac{\gamma''(s_0)}{|\gamma''(s_0)|}$ le vecteur normal principal et leur produit vectoriel $B(s_0) = T(s_0) \wedge N(s_0)$ le vecteur binormal, de sorte que $(T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$T' = kN, \quad N' = -kT + \tau B, \quad \text{et} B' = -\tau N,$$

où k est la courbure au point $\gamma(s)$ et τ la torsion en ce point.

Exercice 8. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane lisse et régulière.

a) Soit $t_0 \in I$. Donner la nature géométrique de l'ensemble $T(t_0)$ des points $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(\gamma(t_0) - p) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

b) On suppose que $\cap_{t \in I} T(t) \neq \emptyset$. Montrer que γ est un arc de cercle.
Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $f : t \mapsto |\gamma(t) - p|^2$, pour un point $p \in \mathbb{R}^2$ à choisir.

c) Montrer que si γ est une courbe plane lisse régulière telle que $\gamma \cdot \gamma' = 0$, alors γ est un arc de cercle.

d) Montrer que toute courbe plane lisse régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est réunion de bouts de droite ou d'arcs de cercle si et seulement si ses droites tangentes sont équidistantes d'un point donné.