

---

Feuille d'exercices n° 9: Indice, formules de Cauchy

---

**Exercice 1** (★). Soit  $C$  le cercle unité parcouru dans le sens direct.

Calculer  $\int_C \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$ .

**Exercice 2** (★). Soit  $\gamma$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  parcourue dans le sens direct ; avec  $a, b > 0$ . En calculant de deux façons différentes  $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ , déterminer la valeur de  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$ .

**Exercice 3.** On note  $C$  le cercle unité de  $\mathbb{C}$  (qu'on parcourt une fois dans le sens direct dans les intégrales ci-dessous). Soit  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Montrer que

$$\overline{\int_C \varphi(z) dz} = - \int_C \overline{\varphi(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Soit  $U$  un domaine contenant le disque fermé  $\bar{D}(0, 1)$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et soit  $z_0 \in U \setminus C$ .

Montrer que  $\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} dz$  est égal à  $\overline{f(0)}$  si  $|z_0| < 1$  ; et égal à  $\overline{f(0)} - \overline{f(1/\bar{z}_0)}$  si  $|z_0| > 1$ .

**Exercice 4.** Soit  $\gamma$  le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation  $y = x^2$  joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_\gamma \bar{z} dz.$$

**Exercice 5.** Soit  $\gamma$  le circuit dont le support est le carré de sommets  $1 + i, 1 - i, -1 - i$  et  $-1 + i$  parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z - 1}{z} dz.$$

**Exercice 6.** En intégrant  $z \mapsto e^z$  le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$  et pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  on a :

$$e^{bz} - e^{az} \leq (b - a)|z|e^{b\operatorname{Re}(z)}.$$

**Exercice 7.** Soit  $\gamma$  le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer  $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$ .

**Exercice 8.** Soit  $\gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :

1)  $\int_\gamma e^z dz$ .

2)  $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$ .

3)  $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$

4)  $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$

5)  $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2} dz$ .