Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

UE de calcul différentiel et analyse complexe

Feuille d'exercices n° 9: Indice, formules de Cauchy

Exercice 1 ($\star$)**.** Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct.
Calculer $\displaystyle\int_C \frac{dz}{2z^2-5z+2}$.

Exercice 2 ($\star$)**.** Soit γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parcourue dans le sens direct ; avec $a, b>0$. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Exercice 3. On note C le cercle unité de $\mathbb{C}$ (qu'on parcourt une fois dans le sens direct dans les intégrales ci-dessous). Soit $\varphi : C \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que

$$\overline{\int_C \varphi(z)dz} = -\int_C \overline{\varphi(z)}\frac{dz}{z^2}.$$

Soit U un domaine contenant le disque fermé $\bar{D}(0,1)$, soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in U \setminus C$.
Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz$ est égal à $\overline{f(0)}$ si $|z_0|<1$; et égal à $\overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{z_0})}$ si $|z_0|>1$.

Exercice 4. Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_\gamma \overline{z}dz.$$

Exercice 5. Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1+i$, $1-i$,$-1-i$ et $-1+i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z}dz.$$

Exercice 6. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(z)} \geqslant 0$ on a :

$$e^{bz} - e^{az} \leqslant (b-a)|z|e^{b\mathrm{Re(z)}}.$$

Exercice 7. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z}dz$.

Exercice 8. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :
1) $\int_\gamma e^z dz$.
2) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}dz$.
3) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z}dz$
4) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}dz$
5) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2}dz$.