Feuille d'exercices n° 9 : Multiplicateurs de Lagrange

Exercice 1. Trouver le point de la courbe $y^2 = 4x$ dont la distance vers $(1, 0)$ est minimale.
a) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
b) en réduisant le problème à l'étude d'une fonction d'une variable.

Exercice 2. Calculer le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sur l'ellipsoïde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1\}.$$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = 2x^3 + y^4$. Calculer le maximum et le minimum de f sur l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercice 4. (Triangle d'aire maximale) Soit $p > 0$. Rappelons la formule de Héron, qui donne l'aire d'un triangle de côtés x, y, z et de périmètre $2p$:

$$A = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}.$$

Justifier que parmi les triangles de périmètre $2p$, il y en a un d'aire maximale et le déterminer.

Exercice 5. Maximiser la fonction

$$f : (x, y, z) \mapsto yz$$

sous les contraintes $y^2 + z^2 = 1$ et $xz = 3$.

Exercice 6. (Contre-exemple aux extrema liés) On définit pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $g_1(x, y, z) = z$ et $g_2(x, y, z) = z - x^2$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$.
a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une droite que l'on déterminera.
b) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, les contraintes ne sont pas qualifiées en (x, y, z).
c) Montrer que l'unique point de minimum global de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = (x + 1)^2 + y^2$$

sur $\mathcal{C}$ n'est pas solution du système donné par le théorème des extrema liés.

Exercice 7. (Inégalité de Hadamard) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et on définit f : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$, $f(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée des vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n$.
a) Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par $\|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1$ est atteint et qu'il est strictement positif.
b) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange montrer que si le maximum de f sur X est atteint en $(v_1, \ldots, v_n)$ alors les v_i forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
c) En déduire l'inégalité de Hadamard

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \|v_1\| \ldots \|v_n\|$$

pour toute famille d'éléments $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$. Quand a-t-on égalité ?