Polytech' Paris-Sud
 Orsay

2011–2012
 PeiP1-S1-Math

TEST DE MATHÉMATIQUES
questions pour le contrôle en TD

Octobre 2011

Attention, ce document comporte 2 pages (et 20 questions).
Pour chaque assertion, dire si elle est vraie ou fausse, avec justification.

1. La fonction $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]$,
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$
est définie correctement.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{|x|}$, alors $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \cos(f(x))$ existe.
3. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$ alors la fonction $\frac{f}{(2+g)^3}$ est continue sur $[0, 1]$.
4. La fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x) = (e^{\sin x} - 1) \ln\left(3 + \cos \frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0.
5. Soit H la fonction définie par
$$H(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \ln(|x|) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^x$ alors $H \circ f$ est continue sur $\mathbf{R}$.
6. Si f est une fonction croissante sur $\mathbf{R}$, alors f est continue sur $\mathbf{R}$.
7. On a
$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{3\ln^2 x + 2x}{e^x + (1 + \ln x)^2} = 3$$
8. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et $f(a) < f(b)$, alors l'image par f de l'intervalle $[a, b]$ est l'intervalle $[f(a), f(b)]$.
9. L'image par la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ de l'intervalle $]-1, 1[$ est $\mathbf{R}$.
10. La fonction $x \mapsto |x| \sin x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
11. Soit f une fonction dérivable en 0, alors
$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0)$$

12. Réciproquement, si f est une fonction continue en 0 telle que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(-x)}{2x} = l \in \mathbf{R}$$

alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = l$.

13. Si f est une fonction dérivable sur $[0,4]$ qui atteint son maximum en 0, alors $f'(0) = 0$.
14. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$ alors f admet soit un maximum soit un minimum.
15. La fonction f définie par

$$f(x) = e^x + \sin(e^x) + e^{-2x} + \cos(e^{-2x})$$

admet un minimum sur $\mathbf{R}$.

16. On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [-1,1[$ telle que $f(I) = \mathbf{R}$.
17. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue alors la restriction de f à $]-1,1[$ est bornée.
18. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue alors la restriction de f à $[-1,1]$ est bornée.
19. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable en tout point et elle ne s'annule pas alors la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est aussi dérivable en tout point.
20. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable en tout point et f' ne s'annule pas alors la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est aussi dérivable en tout point.